

10.4.2 Correction

Cor. 5 : Colonne de levage

Sujet page 44

Q1. Déterminer la résultante $\vec{R}_{S \rightarrow C}$ de l'action mécanique du sol sur la colonne, en fonction de q_1, q_2 et des dimensions.

On sait que $d\vec{R}_{S \rightarrow C} = q(y) \cdot ds \vec{z}$ avec $ds = dx \cdot dy$

avec $x \in [a-b, a]$ et $x \in [-a, -(a-b)]$ et $y \in [0, L]$ et $q(y) = \frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y + q_1$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L q(y) \cdot dx \cdot dy \vec{z} \\ \vec{R}_{S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y + q_1 \right) \cdot dx \cdot dy \vec{z} \\ \vec{R}_{S \rightarrow C}^1 &= b \cdot \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot \frac{L^2}{2} + q_1 \cdot L \right) \vec{z} = b \cdot \frac{q_2 + q_1}{2} \cdot L \vec{z} \end{aligned}$$

par analogie pour l'autre pied

$$\vec{R}_{S \rightarrow C}^2 = b \cdot \frac{q_2 + q_1}{2} \cdot L \vec{z}$$

d'où

$$\vec{R}_{S \rightarrow C} = b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \vec{z}$$

Q2. Déterminer le moment en $O, \vec{M}_{O,S \rightarrow C}$, de cette action mécanique, puis en $P, \vec{M}_{P,S \rightarrow C}$.

On détermine dans un premier temps pour le pied avec $x > 0$

Soit un point Q avec $\vec{OQ} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L \vec{OQ} \wedge (q(y) \cdot dx \cdot dy \vec{z}) \\ \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y}) \wedge (q(y) \cdot dx \cdot dy \vec{z}) \\ \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L -x \cdot q(y) \cdot dx \cdot dy \vec{y} + \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L y \cdot q(y) \cdot dx \cdot dy \vec{x} \\ \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L -x \cdot \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y + q_1 \right) \cdot dx \cdot dy \vec{y} \\ &\quad + \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L y \cdot \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y + q_1 \right) \cdot dx \cdot dy \vec{x} \end{aligned}$$

Il n'est pas utile de calculer l'intégrale suivant \vec{y} , compte tenu de la symétrie de la répartition des actions mécaniques sur les deux pieds, le moment autour de (O, \vec{y}) ne peut être que nul, je vous laisse vé-

rifier. On ne calcule que le moment suivant (O, \vec{x}) .

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= \int_{x=a-b}^a \int_{Y=0}^L y \cdot \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y + q_1 \right) \cdot dx \cdot dy \vec{x} \\ \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= b \int_{Y=0}^L \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot y^2 + q_1 \cdot y \right) \cdot dy \vec{x} \\ \vec{M}_{O,S \rightarrow C}^1 &= b \cdot \left(\frac{q_2 - q_1}{L} \cdot \frac{L^3}{3} + q_1 \cdot \frac{L^2}{2} \right) \cdot \vec{x} = b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

par analogie, on déduit le moment des deux pieds

$$\vec{M}_{O,S \rightarrow C} = 2 \cdot b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 \cdot \vec{x}$$

En P ce moment s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P,S \rightarrow C} &= \vec{M}_{O,S \rightarrow C} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_{S \rightarrow C} \\ \vec{M}_{P,S \rightarrow C} &= 2 \cdot b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 \cdot \vec{x} + ((e-d) \cdot \vec{y} + h \cdot \vec{z}) \wedge b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \vec{z} \\ \vec{M}_{P,S \rightarrow C} &= \left(2 \cdot b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 + (e-d) \cdot b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \right) \vec{x} \end{aligned}$$

Q3. en déduire le torseur de l'action mécanique du sol, $\{\mathcal{T}_{S \rightarrow C}\}$, sur la colonne en P .

$$\{\mathcal{T}_{S \rightarrow C}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{S \rightarrow C} = b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \vec{z} \\ \vec{M}_{P,S \rightarrow C} = \left(2 \cdot b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 + (e-d) \cdot b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \right) \vec{x} \end{array} \right\}_P$$

Q4. Déterminer q_1 et q_2 en fonction de F_T et de d

On écrit l'équilibre de la colonne en P . Elle est soumise à deux actions mécaniques : $\{\mathcal{T}_{S \rightarrow C}\}$ et $\{\mathcal{A}_{T \rightarrow C}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F_T \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P$

On en déduit les deux équations de l'équilibre :

$$\begin{cases} -F_T + b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L = 0 \\ \left(2 \cdot b \cdot \left(\frac{q_2}{3} + \frac{q_1}{6} \right) \cdot L^2 + (e-d) \cdot b \cdot (q_2 + q_1) \cdot L \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q_1 &= F_T \cdot \frac{2 \cdot L + 3 \cdot e - 3 \cdot d}{b \cdot L^2} \\ q_2 &= -F_T \cdot \frac{2 \cdot L + 3 \cdot e - 3 \cdot d}{b \cdot L^2} \end{aligned}$$

Pour éviter la déformation du sol, les valeurs q_1 et q_2 ne doivent jamais être nulles. En déduire les valeurs mini et maxi de d .

On résoud

$$q_1 = F_T \cdot \frac{2 \cdot L + 3 \cdot e - 3 \cdot d}{b \cdot L^2} = 0 \Rightarrow d_{max} = e + \frac{2}{3} \cdot L$$

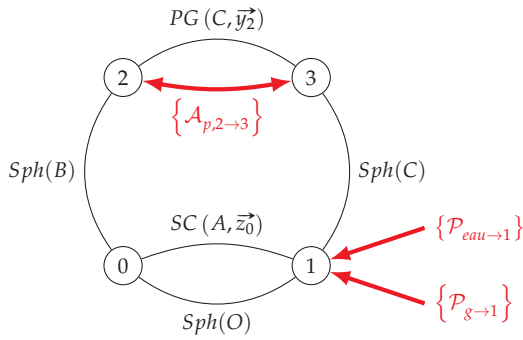
et

$$q_2 = -F_T \cdot \frac{2 \cdot L + 3 \cdot e - 3 \cdot d}{b \cdot L^2} = 0 \Rightarrow d_{min} = e + \frac{1}{3} \cdot L$$

Cor. 6 : Ecluse de Canal

Sujet page 45

Q1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme complet constituée par le bajoyer, le corps du vérin, la tige du vérin et le vantail.



Q2. Préciser sur le graphe les actions mécaniques en rouge

— action de la gravité : $\{P_{g \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{P}_1 = -M_1 \cdot \vec{g} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_1}$

— action de l'eau sur (1) : $\{P_{eau \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{e \rightarrow 1} \\ \vec{M}_{O,e \rightarrow 1} \end{matrix} \right\}_O$

— action de la pression dans le vérin :

$$\{A_{p,2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{2 \rightarrow 3} = R_{23} \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$$

Q3. Préciser les différents torseurs d'action transmissibles par les liaisons.

— Sphérique en O entre (0) et (1) $\{A_{0 \rightarrow 1}^O\} = \left\{ \begin{matrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{matrix} \right\}_{O_{VB}}$;

— Sphère cylindre en A entre (0) et (1) $\{A_{0 \rightarrow 1}^A\} = \left\{ \begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})_A}$;

— Sphérique en C entre (1) et (3) $\{A_{1 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{matrix} \right\}_{C_{VB}}$;

— Sphérique en B entre (0) et (2) $\{A_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} X_B & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{matrix} \right\}_{B_{VB}}$;

— Pivot glissant d'axe (C, \vec{y}_2) entre (2) et (3)

$$\{A_{2 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{23} & L_{23} \\ 0 & 0 \\ Z_{23} & Z_{23} \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z})_O}$$
 ;

Q4. Soit P un point du vantail de coordonnées (x, 0, z) dans (O, $\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}$), exprimer sa vitesse par rapport au bajoyer $\vec{V}_{P \in 1/0}$ en fonction de ω_1 .

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P \in 1/0} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{OP} \right] = \frac{dx \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0}{dt} \\ \vec{V}_{P \in 1/0} &= \vec{\Omega}_{1/0} \wedge (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) \\ \vec{V}_{P \in 1/0} &= \omega_1 \cdot \vec{z}_0 \wedge (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) = x \cdot \omega_1 \cdot \vec{y}_1 \end{aligned}$$

Q5. Exprimer $dF_{eau \rightarrow v}$ en fonction de ω_1 et x. Préciser l'élément de surface ds ainsi que les bornes d'intégration.

$$\begin{aligned} dF_{eau \rightarrow v} &= -p_r \cdot ds \cdot \vec{y}_1 = -k \cdot \rho \cdot \overline{V_{P \in v/b^2}} \cdot ds \cdot \vec{y}_1 \\ &= -k \cdot \rho \cdot x^2 \cdot \omega_1^2 \cdot ds \cdot \vec{y}_1 \\ &= -k \cdot \rho \cdot x^2 \cdot \omega_1^2 \cdot dx \cdot dz \cdot \vec{y}_1 \end{aligned}$$

avec $x \in [0, L]$ et $z \in [0, h_e]$

Q6. Déterminer $\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$ en fonction de ω_1 et des différents paramètres géométriques. Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{eau \rightarrow v} &= \int_S d\vec{F}_{eau \rightarrow v} = \int_S -k \cdot \rho \cdot x^2 \cdot \omega_1^2 \cdot ds \cdot \vec{y}_1 = \int_0^L \int_0^{\frac{H}{2}} -k \cdot \rho \cdot x^2 \cdot \omega_1^2 \cdot dx dz \cdot \vec{y}_1 \\ &= -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{y}_1 \end{aligned}$$

Q7. Déterminer $\vec{M}_{O,eau \rightarrow 1} = \int_S \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,eau \rightarrow v} &= \int_S \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{eau \rightarrow v} = \int_S (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) \wedge -k \cdot \rho \cdot x^2 \cdot \omega_1^2 \cdot ds \cdot \vec{y}_1 \\ &= -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \int_S x^3 \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1 \cdot ds \\ &\quad - k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \int_S x^2 \cdot z \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{y}_1 \cdot ds \\ &= -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \int_0^L \int_0^{\frac{H}{2}} x^3 \cdot dx dz \cdot \vec{z}_0 \\ &\quad + k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \int_0^L \int_0^{\frac{H}{2}} x^2 \cdot z \cdot dx dz \cdot \vec{x}_1 \\ &= -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^4}{4} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{z}_0 + k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H^2}{8} \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Q8. Exprimer le torseur de l'action mécanique de l'eau sur le vantail en O.

$$\{A_{eau \rightarrow v}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_{eau \rightarrow v} = -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{M}_{O,eau \rightarrow v} = -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^4}{4} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{z}_0 + k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H^2}{8} \cdot \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}_O$$

Q9. Déterminer le point P du vantail pour lequel $\vec{M}_{P,eau \rightarrow 1} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P,eau \rightarrow 1} &= \vec{0} \\ \vec{M}_{P,eau \rightarrow 1} &= \vec{M}_{O,eau \rightarrow 1} + \vec{PO} \wedge \vec{F}_{eau \rightarrow v} \\ \vec{M}_{P,eau \rightarrow 1} &= -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^4}{4} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{z}_0 + k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H^2}{8} \cdot \vec{x}_1 \\ &\quad - (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) \wedge -k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{y}_1 = \vec{0} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} -\frac{L^4}{4} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{z}_0 + \frac{L^3}{3} \cdot \frac{H^2}{8} \cdot \vec{x}_1 - (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) \wedge -\frac{L^3}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{y}_1 &= \vec{0} \\ -\frac{L}{4} \cdot \vec{z}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{4} \cdot \vec{x}_1 - (x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0) \wedge -\frac{1}{3} \cdot \vec{y}_1 &= \vec{0} \\ -\frac{L}{4} \cdot \vec{z}_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{4} \cdot \vec{x}_1 + \frac{1}{3} \cdot x \cdot \vec{z}_0 - \frac{1}{3} \cdot z \cdot \vec{x}_1 &= \vec{0} \\ \left(-\frac{L}{4} + \frac{1}{3} \cdot x\right) \cdot \vec{z}_0 + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{H}{4} - \frac{1}{3} \cdot z\right) \cdot \vec{x}_1 &= \vec{0} \end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned} -\frac{L}{4} + \frac{1}{3} \cdot x = 0 &\Rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot L \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{4} - \frac{1}{3} \cdot z = 0 &\Rightarrow z = \frac{H}{4} \end{aligned}$$

Q10. Déterminer le moment en O du torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison sphère cylindre entre (0) et (1).

On sait $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}^A\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})_A}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^A &= \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1}^A + \vec{OA} \wedge (X_A \cdot \vec{x}_0 + Y_A \cdot \vec{y}_0) \\ \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^A &= H \cdot \vec{z}_0 \wedge (X_A \cdot \vec{x}_0 + Y_A \cdot \vec{y}_0) \\ \vec{M}_{O,0 \rightarrow 1}^A &= H \cdot X_A \cdot \vec{y}_0 - H \cdot Y_A \cdot \vec{x}_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}^A\} = \begin{Bmatrix} X_A & -H \cdot Y_A \\ Y_A & H \cdot X_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O}$$

Q11. Déterminer le torseur résultant des deux liaisons entre le bâjoier (0) et le vantail (1) en O.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} &= \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}^O\} + \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}^A\} \\ \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} + \begin{Bmatrix} X_A & -H \cdot Y_A \\ Y_A & H \cdot X_A \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} \\ \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} X_O + X_A & -H \cdot Y_A \\ Y_O + Y_A & H \cdot X_A \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} \end{aligned}$$

On reconnaît le torseur des actions transmissibles d'une liaison Pivot.

Q12. En isolant, l'ensemble {2,3}, justifier que la résultante de l'action mécanique en A de la tige du vérin sur le vantail s'écrit : $\vec{R}_{3 \rightarrow 1} = F \cdot \vec{y}_2$.

L'ensemble {2,3} est soumis à l'action de deux glisseurs (sphérique en B et C). On sait que l'ensemble est en équilibre si les deux résultantes sont opposées et colinéaires portées par la droite passant par les deux points d'application des actions mécaniques (B et C ici). la droite (BC) a pour vecteur unitaire \vec{y}_2 , on da donc bien :

$$\vec{R}_{3 \rightarrow 1} = F \cdot \vec{y}_2 \quad (10.1)$$

On a donc $\{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_C}$

Q13. Déterminer le moment en O de cette action $\vec{M}_{O,3 \rightarrow 1}$.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1} &= \vec{0} + \vec{OC} \wedge F \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1} &= (H \cdot \vec{z}_0 + a \cdot \vec{x}_1) \wedge F \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1} &= -H \cdot F \cdot \vec{x}_2 + a \cdot F \cdot \sin(\vec{x}_1, \vec{y}_2) \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1} &= -H \cdot F \cdot \vec{x}_2 + a \cdot F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \alpha\right) \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1} &= -H \cdot F \cdot \vec{x}_2 + a \cdot F \cdot \cos(\beta - \alpha) \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

le torseur devient $\{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -H \cdot F \\ F & 0 \\ 0 & a \cdot F \cdot \cos(\beta - \alpha) \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)_O}$

Q14. Déterminer F en fonction de la pression p_v .

En isolant, la tige du vérin, elle est soumise à la pression, l'action du corps et l'action du vantail. En écrivant le théorème de la résultante suivant \vec{y}_2 , on déduit :

$$F = p_v \cdot S_u$$

Q15. Préciser les autres actions mécaniques extérieures sur le vantail, et leur moment en O en projection sur \vec{z}_0 .

La dernière action extérieure sur le portail est le poids. ici le poids est porté par \vec{z}_0 le moment en O en projection sur $\vec{z}(0)$ est donc nul.

Q16. Énoncer le PFS.

Cf Cours

pour le vantail, on a

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{A}_{eau \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{P}_{g \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

Q17. Quelle équation doit-on écrire pour obtenir une relation entre l'action de l'eau et l'action du vérin sur le vantail, justifier ?

On cherche une relation entre l'action de l'eau et l'action développée par le vérin. L'action du vérin doit entraîner en rotation le vantail autour de (O, \vec{z}_0) , l'action de l'eau s'opposant à ce mouvement. Il semble donc pertinent ici d'écrire l'équation du moment en projection en O suivant \vec{z}_0

Q18. Déterminer la relation donnant F en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du vantail, en déduire p_v en fonction de ω_1 .

$$(\vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} + \vec{M}_{O,eau \rightarrow 1} + \vec{M}_{O,g \rightarrow 1} + \vec{M}_{O,3 \rightarrow 1}) \cdot \vec{z}(0) = 0$$

$$0 - k \cdot \rho \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{L^4}{4} \frac{H}{2} + 0 + a \cdot F \cdot \cos(\beta - \alpha) = 0$$

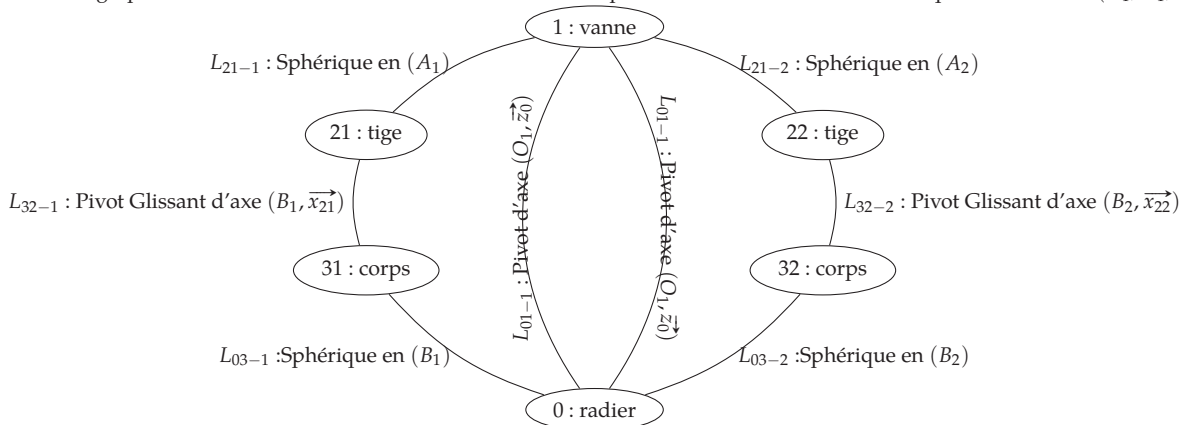
d'où

$$F = \frac{k \cdot \rho \cdot \omega_1^2}{a \cdot \cos(\beta - \alpha)} \cdot \frac{H \cdot L^4}{8}$$

Cor. 7 : Barrage du Couesnon

Sujet page 48

Q1. Tracer le graphe de structure du mécanisme du mécanisme complet. Préciser les torseurs cinématiques de la boucle (O_1, A_1, B_1) .



Q2. Justifier que l'action élémentaire de l'eau sur la vanne au point P s'écrit :

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{e \rightarrow 1}(P) &= -R_1 \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot ds \cdot \vec{n} \\ \text{avec } ds &= R_1 \cdot d\alpha \cdot dz \text{ et } h = R_1 \cdot \sin \alpha \\ d\vec{F}_{e \rightarrow 1}(P) &= -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot dz \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

Q3. Déterminer $\vec{F}_{e \rightarrow 1} = F_{ex} \cdot \vec{x}_0 + F_{ey} \cdot \vec{y}_0$.

Q3a. Faire l'application numérique.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= \int_0^{-60} \int_{-L}^L \frac{L}{2} -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot dz \cdot \vec{n} \\ \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= \int_0^{-60} \int_{-L}^L \frac{L}{2} -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot dz \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{x}_0 + \sin \alpha \cdot \vec{y}_0) \\ \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= \int_0^{-60} \int_{-L}^L \frac{L}{2} -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot dz \cdot \vec{x}_0 \\ &\quad + \int_0^{-60} \int_{-L}^L \frac{L}{2} -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin^2 \alpha \cdot d\alpha \cdot dz \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot \int_0^{-60} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{x}_0 - R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \int_0^{-60} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= -R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot L \cdot \left[\frac{1 - \cos^2 \alpha}{2} \right]_0^{-60} \cdot \vec{x}_0 - R_1^2 \cdot \rho \cdot g \cdot \left[\frac{t - \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2} \right]_0^{-60} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{F}_{e \rightarrow 1} &= \frac{3}{8} \cdot L \cdot \rho \cdot g \cdot R_1^2 \cdot \vec{x}_0 - L \cdot \rho \cdot g \cdot R_1^2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{6} \cdot \pi \right) \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Q4. Justifier que le torseur de l'action mécanique de l'eau en O s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{e \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_{ex} & 0 \\ F_{ey} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Le moment est nul car $\vec{OM} \wedge d\vec{F}_{e \rightarrow 1}(P) = \vec{0}$.

Q5. Tracer le graphe de structure de ce mécanisme.

Q5a. Placer les actions mécaniques, de l'eau, de la gravité et de la pression (on négligera la masse de la tige et du corps du vérin devant la masse de la vanne (1) et des actions mécaniques.

Q5b. Rappeler le torseur d'action mécanique transmissible par chaque liaison dans le cas de l'hypothèse d'un modèle plan.

Le mécanisme plan comporte $n_s = 8$ inconnues. dans le plan on peut écrire $n_e = 3 \cdot (n - 1) = 9$ équations.

Le système comporte donc 8 inconnues pour 9 équations, il est à priori possible de déterminer toutes les inconnues de liaisons, s'il n'y a pas d'équations liés.

Q6. Justifier cette stratégie.

- on isole l'ensemble {2,3} : l'ensemble {2,3} est soumis à deux glisseurs, les deux glisseurs sont opposés et portés par la droite (AB).
- on isole ensuite {2} : la tige {2} est soumise à deux glisseurs (le précédent et la pression) et la liaisons glissière, l'isolement va permettre de déterminer la résultante de l'action de 1 → 2 en fonction de la pression.
- on isole finalement {1}

Q7. En isolant {2,3} puis {2}, en déduire l'action en B entre les solides 2 et 1 en fonction de P_H et des dimensions utiles du vérin.

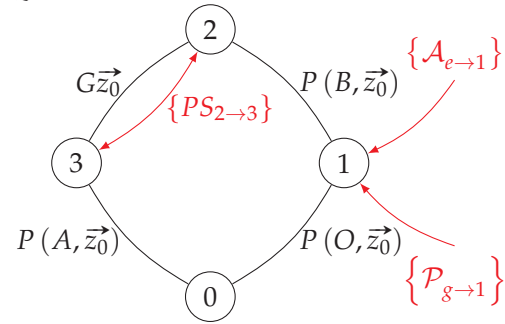
On isole {2,3} : Soumis à deux glisseurs $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$ et $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$.

Ces deux glisseurs sont donc opposés, le support des glisseurs est la droite d'action (A, \vec{x}_3).

Q5c. Combien d'inconnues de liaisons possède ce mécanisme ?

Q5d. Combien d'équation peut-on écrire ?

Q5e. Conclure.



Actions de liaison

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$$

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$$

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & N_{23} \end{Bmatrix}_{\sqrt{P}}(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

$$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{03} & 0 \\ Y_{03} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$$

Actions mécaniques

$$\{PS_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} p \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\sqrt{Pin(A, \vec{x}_3)}}(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

$$\{P_{g \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_1 \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}_0)$$

$$\{\mathcal{A}_{e \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_{ex} & 0 \\ F_{ey} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

On a donc dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ (pour le détail des calculs, voir le cours!) :

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B \text{ et } \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\begin{Bmatrix} -X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

On isole {2} Soumis à $\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$, $\{PS_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} p \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

$$- \begin{Bmatrix} p \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

En écrivant le théorème de la résultante statique en projection suivant \vec{x}_3 , on obtient

$$X_{12} = p \cdot S$$

Il n'est pas utile d'écrire les autres équations !

Q8. On isole maintenant {1}

On isole {1} soumis à $\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -p \cdot S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)^B}$, $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\} =$ avec

$\begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^O}$, $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_1 \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^G}$ et $\{\mathcal{A}_{e \rightarrow 1}\} =$

$\begin{Bmatrix} F_{ex} & 0 \\ F_{ey} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^O}$.

Q8a. Quelle équation faut-il écrire pour obtenir directement une relation entre p_H et les efforts extérieurs.

Ici seule l'équation des moments en O en projection sur \vec{z}_0 est utile, elle permet de ne pas faire intervenir les inconnues de la liaison $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 1}\}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,2 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{M_{O,0 \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{M_{O,G \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 + \overrightarrow{M_{O,E \rightarrow 1}} \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ \overrightarrow{OB} \wedge (-p \cdot S \cdot \vec{x}_3) \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + \overrightarrow{OG} \wedge (-m_1 \cdot g \cdot \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} &= 0 \\ (a \cdot \vec{x}_1 + b \cdot \vec{y}_1) \wedge (-p \cdot S \cdot \vec{x}_3) \cdot \vec{z}_0 + (c \cdot \vec{x}_1 + d \cdot \vec{y}_1) \wedge (-m_1 \cdot g \cdot \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 &= 0 \\ -e \cdot p \cdot S \cdot \sin(\beta + \theta) - f \cdot p \cdot S \cdot \cos(\beta + \theta) - c \cdot m_1 \cdot g \cdot \cos \beta + d \cdot m_1 \cdot g \cdot \sin \beta &= 0 \\ -p \cdot S \cdot (e \cdot \sin(\beta + \theta) + f \cdot \cos(\beta + \theta)) + m_1 \cdot g \cdot (-c \cdot \cos \beta + d \cdot \sin \beta) &= 0 \end{aligned}$$

$$p \cdot S = \frac{m_1 \cdot g \cdot (-c \cdot \cos \beta + d \cdot \sin \beta)}{e \cdot \sin(\beta + \theta) + f \cdot \cos(\beta + \theta)}$$

$$\tan \theta = \frac{f - a \cdot \sin \beta - b \cdot \cos \beta}{e - a \cdot \cos \beta + b \cdot \sin \beta}$$

Q9. Quel est l'effet de l'action de l'eau sur la pression? Aurait-on pu prévoir ce comportement?

Pas d'effet direct sur la pression dans le vérin, la forme de la vanne a été choisie, pour justement pouvoir se déplacer dans l'eau sans que la hauteur d'eau soit un problème.

Par contre les deux liaisons pivots en O_1 et O_2 doivent, elles, résister à l'action de l'eau.

Q10. Déterminer, dans la position de la figure, la pression p_H nécessaire pour maintenir la vanne (1), avec : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = -30^\circ$ et $\vec{x}_3 = \vec{x}_0$.

Cor. 8 : Robot Roméo

Sujet page 52

Q1. Afin de choisir le capteur de force nécessaire à cette campagne de mesures, donner un ordre de grandeur de l'étendue de mesures nécessaire, ainsi qu'un ordre d'idée de la précision requise.

Pour réaliser ces essais, il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision. Ces mesures ont pour seul but d'avoir une idée de l'effort que peut exercer une personne âgée. L'effort maximum toléré sur le cahier des charges est de 100N. Un capteur avec une étendue de 150N et une précision de $\pm 5N$ suffit par exemple.

Q2. À partir d'un enregistrement de l'effort de relèvement en fonction du temps (simulé lors d'une expérience), donné en annexe ??, déterminer graphiquement le temps de maintien d'un effort supérieur à 10N associée à cette courbe.

L'effort doit être maintenu un peu plus de 3s.

Q3. Pour la boucle gauche du graphe des liaisons (figure ??), donner les torseurs cinématiques et les torseurs des actions transmissibles par les liaisons.

— Liaison $2D / 0$: $\{\mathcal{V}_{2D/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega}_{2D/0} = \omega_{2D/0} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{C_D}$

, $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 2D}\} = \begin{Bmatrix} X_{02D} & L_{02D} \\ Y_{02D} & 0 \\ Z_{02D} & N_{02D} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{C_D}}$

— Liaison $3D / 2D$: $\{\mathcal{V}_{3D/2D}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega}_{3D/2D} = \omega_{3D/2D} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{B_{C_D}}$

, $\{\mathcal{A}_{2D \rightarrow 3D}\} = \begin{Bmatrix} X_{2D3D} & L_{2D3D} \\ Y_{2D3D} & 0 \\ Z_{2D3D} & N_{2D3D} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{B_{C_D}}}$;

— Liaison $4D / 3D$: $\{\mathcal{V}_{4D/3D}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x43} & 0 \\ \omega_{y43} & 0 \\ \omega_{z43} & 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{A_D}}$

, $\{\mathcal{A}_{3D \rightarrow 4D}\} = \begin{Bmatrix} X_{3D4D} & 0 \\ Y_{3D4D} & 0 \\ Z_{3D4D} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{A_D}}$

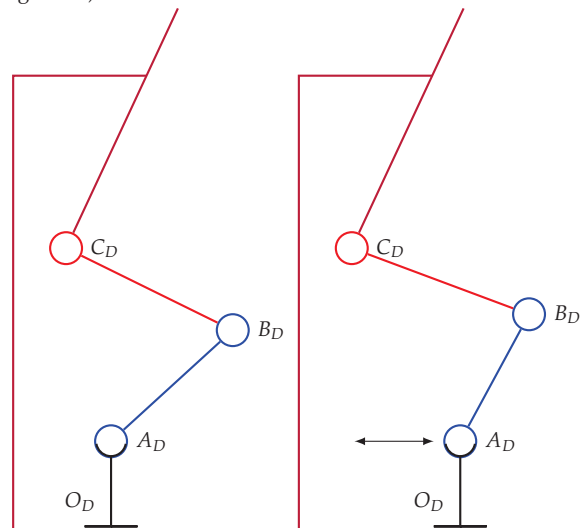
— Liaison $4D / 0$: $\{\mathcal{V}_{4D/0}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & V_{x43} \\ 0 & V_{y43} \\ \omega_{z43} & 0 \end{matrix} \right\}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{O_D}}$

$\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 4D}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{04D} \\ 0 & M_{04D} \\ Z_{04D} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)^{C_D}}$

— nb nconnues : $I_c = 8$ inconnues cinématiques, $I_s = 16$ inconnues de liaison

Q4. Mettre en évidence sur la figure ?? reprise sur la copie, à l'aide de flèches, les deux mobilités de la chaîne fermée de solides (01-2G-3G-4G-01). (Dans cette question, on ne prendra en compte qu'une seule des deux chaînes fermées : voir figure ??).

La première mobilité est la rotation du pied autour de l'axe (O_D, \vec{z}_0) . La deuxième correspond au mouvement du pied, de la jambe et de la cuisse obtenu en faisant glisser le pied sur le sol (voir la figure ??).



Q5. Préciser le nombre d'inconnues de liaisons de ce modèle simplifié et le nombre d'équations que l'on peut écrire. Peut-on résoudre complètement ce mécanisme?

Le mécanisme comporte $I_s = 16$ inconnues, le mécanisme comporte $N = 4$ solides soit $E_s = (N - 1) \cdot 6 = 18$ équations, le système comporte $m = 2$ mobilités, il est donc possible de résoudre complètement le mécanisme $h = E_s - I_s - m = 0$.

Q6. Justifier que les liaisons entre les solides (3D) et (3G) et le sol (0) peuvent être modélisées par des liaisons sphère-plan.

À partir d'une étude cinématique :

$$\begin{aligned} \{V_{3D/0}\} &= \{V_{3D/4D}\} + \{V_{4D/0}\} \\ \{V_{3D/0}\} &= \{V_{3D/4D}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x34} & 0 \\ \omega_{y34} & 0 \\ \omega_{z34} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}^{A_D} + \begin{Bmatrix} 0 & V_{x40} \\ 0 & V_{y40} \\ \omega_{z40} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}^{A_D} \\ \{V_{3D/0}\} &= \{V_{3D/4D}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x34} & V_{x40} \\ \omega_{y34} & V_{y40} \\ \omega_{z34} + \omega_{z40} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}^{A_D} \end{aligned}$$

On reconnaît le torseur cinématique d'une liaison sphère plan.

Remarque : Le torseur de la liaison appui plan à la même forme en tout point

Q7. À partir de la figure ??, reprendre le graphe des liaisons du robot Roméo en considérant que le buste n'est plus fixe par rapport au sol.

Voir la figure 10.18.

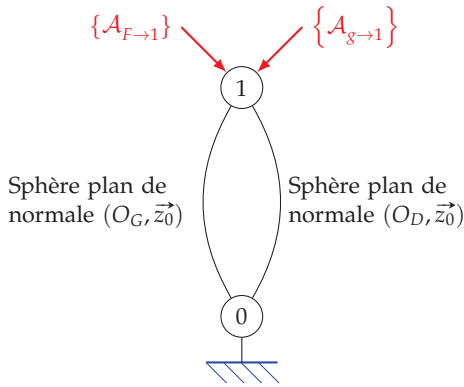


FIGURE 10.18 – Graphe des liaisons

Q8. Placer sur le graphe les actions mécaniques extérieures au robot.

Voir la figure 10.18.

Q9. Écrire les expressions de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) ainsi modélisé et isolé.

- poids : $\{A_{g \rightarrow 1}\} = \left\{ \vec{P} = \frac{-M \cdot g \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_G$;
- Action en D : $\{A_{F \rightarrow d}\} = \left\{ \vec{F} = \frac{-F \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_D$;
- liaison en O_G : $\{A_{O_G, 0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \vec{R}_{O_G} = \frac{Z_{O_G} \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_{O_G}$
- liaison en O_D : $\{A_{O_D, 0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \vec{R}_{O_D} = \frac{Z_{O_D} \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_{O_G}$

Q10. Déterminer les expressions des composantes des deux torseurs des actions mécaniques du sol (0) sur chacun des pieds en fonction F, M, g, d et e , lorsqu'ils sont exprimés respectivement aux points O_G et O_D .

On écrit le PFS en O_G ;

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O_G, F \rightarrow 1} &= \vec{O_G D} \wedge (-F \cdot \vec{z}_0) = ((e-d) \cdot \vec{y}_0 + Z_D \cdot \vec{z}_0) \wedge (-F \cdot \vec{z}_0) \\ \vec{M}_{O_G, F \rightarrow 1} &= -(e-d) \cdot F \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_{O_G, g \rightarrow 1} &= \vec{O_G G} \wedge (-M \cdot g \cdot \vec{z}_0) = (-d \cdot \vec{y}_0 + Z_G \cdot \vec{z}_0) \wedge (-M \cdot g \cdot \vec{z}_0) \\ \vec{M}_{O_G, F \rightarrow 1} &= d \cdot M \cdot g \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{M}_{O_G, O_D, 0 \rightarrow 1} &= \vec{O_G O_D} \wedge (Z_{O_D} \cdot \vec{z}_0) = -2 \cdot d \cdot \vec{y}_0 \wedge (Z_{O_D} \cdot \vec{z}_0) \\ \vec{M}_{O_G, F \rightarrow 1} &= -2 \cdot d \cdot Z_{O_D} \cdot \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Le PFS s'écrit :

$$\begin{cases} -M \cdot g - F + Z_{O_G} + Z_{O_D} = 0 \\ d \cdot M \cdot g - (e-d) \cdot F - 2 \cdot d \cdot Z_{O_D} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} Z_{O_D} = \frac{d \cdot M \cdot g - (e-d) \cdot F}{2 \cdot d} \\ Z_{O_G} = M \cdot g + F - Z_{O_D} = \frac{d \cdot M \cdot g + (e+d) \cdot F}{2 \cdot d} \end{cases}$$

Q11. Écrire les deux inégalités qui découlent du respect de ce critère.

$$\begin{cases} Z_{O_D} = \frac{d \cdot M \cdot g - (e-d) \cdot F}{2 \cdot d} \geq 0 \\ Z_{O_G} = M \cdot g + F - Z_{O_D} = \frac{d \cdot M \cdot g + (e+d) \cdot F}{2 \cdot d} \geq 0 \end{cases}$$

Q12. Quel est l'effort maximum qui peut être exercé sur le robot au point D, tout en assurant la condition de non-basculement. Conclure quant au respect du cahier des charges ?

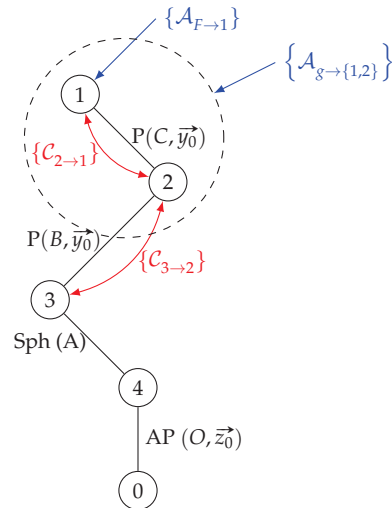
$$\begin{cases} d \cdot M \cdot g - (e-d) \cdot F \geq 0 \\ d \cdot M \cdot g + (e+d) \cdot F \geq 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} F \leq \frac{d \cdot M \cdot g}{e-d} = \frac{96 \cdot 40,5 \cdot 9,8}{140 - 96} \approx 860 \text{ N} \\ F \geq -\frac{d \cdot M \cdot g}{e+d} \end{cases}$$

Le cahier des charges (exigence de performance "charge") précise que l'effort doit être supérieur à 100 N. Cette exigence est largement respectée.

Q13. À l'aide d'une étude statique dans le plan sagittal, donner l'expression littérale du couple C_{32} nécessaire au niveau du genou pour maintenir cette posture sous charge en fonction de ℓ_3, θ_{43}, F et M_{12} et g .



On cherche à déterminer le couple moteur C_{32} , il est judicieux ici, d'isoler l'ensemble {1,2} et d'écrire le théorème du moment statique autour de l'axe (B, \vec{y}_0) .

On isole donc l'ensemble $E = \{1,2\}$:

Inventaire des actions mécaniques :

$$\begin{aligned} \{A_{F \rightarrow 1}\} &= \left\{ \frac{-F \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_D, \{A_{g \rightarrow \{1,2\}}\} = \left\{ \frac{-M \cdot g \cdot \vec{z}_0}{0} \right\}_{G_{12}}, \\ \{A_{3 \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{matrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & 0 \\ Z_{32} & M_{32} \end{matrix} \right\}_B \text{ et } \{C_{3 \rightarrow 2}\} = \left\{ \frac{0}{C_{3 \rightarrow 2} = C_{32} \vec{y}_0} \right\}_B. \end{aligned}$$

Le sujet précise que l'on peut considérer que le mécanisme est plan, on a alors pour $\{\mathcal{A}_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{32} & - & - & - \\ - & - & - & - \\ Z_{32} & - & - & - \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_B}$ Le théorème du moment en B s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \ell_3 \cdot \sin(\theta_{43}) \cdot M \cdot g \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B$$

$$C_{32} + \ell_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F + \ell_3 \cdot \sin(\theta_{43}) \cdot M \cdot g = 0$$

En B

d'où

$$\vec{M}_{B, F \rightarrow 1} = \vec{BD} \wedge (-F \cdot \vec{z}_0) = (-\ell_3 \cdot \vec{z}_3 - \ell_4 \cdot \vec{z}_0 + Z_D \cdot \vec{z}_0) \wedge (-F \cdot \vec{z}_0)$$

$$C_{32} = -\ell_3 \cdot \sin \theta_{43} (F + M \cdot g)$$

$$\vec{M}_{B, F \rightarrow 1} = -\ell_3 \cdot (\cos \theta_{43} \cdot \vec{z}_0 - \sin \theta_{43} \cdot \vec{x}_0) \wedge (-F \cdot \vec{z}_0) = \ell_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F \vec{y}_0$$

$$\vec{M}_{B, g \rightarrow \{1,2\}} = \vec{BG} \wedge (-F \cdot \vec{z}_0) = (-\ell_3 \cdot \vec{z}_3 - \ell_4 \cdot \vec{z}_0 + Z_{G12} \cdot \vec{z}_0) \wedge (-M \cdot g \cdot \vec{z}_0)$$

$$\vec{M}_{B, g \rightarrow \{1,2\}} = \ell_3 \cdot \sin(\theta_{43}) \cdot M \cdot g \vec{y}_0$$

soit :

$$\{\mathcal{A}_{F \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \ell_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B, \quad \{\mathcal{A}_{g \rightarrow \{1,2\}}\} = \frac{C_{32}}{C_{moteur}} = r_{32} \text{ d'où } C_{moteur} = 0,88 \text{ N m.}$$

Q14 Application numérique : En prenant en compte le rapport de réduction du motoréducteur, calculer le couple délivré par le moteur et comparer le au couple de calage (stall torque en anglais dans la documentation), indiqué dans la documentation. Conclure quant à la capacité du robot à rester en position de genuflexion, face au patient qui est en appui sur son épaule.