

9.9.1 Correction

Cor. 1 : Vibreur de téléphone

Sujet page 26

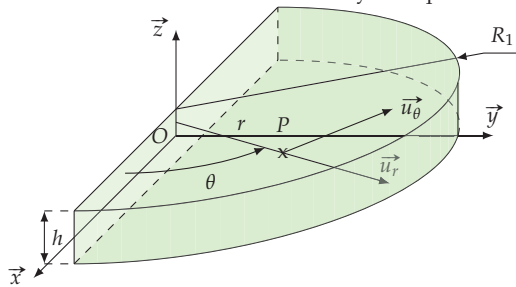
Q1. Déterminer la masse m_1 du demi-disque (D) en fonction de R_1 , h et ρ .

$$m_1 = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot \frac{R_1^2}{2} \cdot h$$

Q2. Déterminer la position du centre de masse G du demi-disque (D) en fonction de R_1 .

Par définition : $\vec{OG}_1 = \frac{1}{m_1} \int_{P \in D} \vec{OP} dm$.

On choisit de travailler en coordonnées cylindriques :



- $\vec{OP} = r \cdot \vec{u}_r + z \cdot \vec{z}$
- $dm = \rho \cdot dv = \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$
- avec $\theta \in [0, \pi]$, $r \in [0, R_1]$ et $h \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$
- $\vec{u}_r = \cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}$
- $\vec{u}_\theta = \cos \theta \cdot \vec{y} - \sin \theta \cdot \vec{x}$

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{m_1} \int_{P \in D} \vec{OP} dm$$

$$\vec{OG}_1 = \frac{1}{m_1} \int_0^{R_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\pi (r(\cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}) + z \cdot \vec{z}) \rho \cdot r d\theta dr dz$$

d'où les 3 composantes

$$\text{sur } x : \frac{1}{m_1} \int_0^{R_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\pi r \cos \theta \rho \cdot r d\theta dr dz = 0$$

$$\text{sur } y : \frac{1}{m_1} \int_0^{R_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\pi r \sin \theta \rho \cdot r d\theta dr dz = \frac{2 \cdot \rho \cdot R_1^2 \cdot h}{3 \cdot m_1}$$

$$\text{sur } z : \frac{1}{m_1} \int_0^{R_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^\pi z \rho \cdot r d\theta dr dz = 0$$

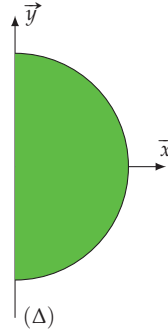
On aurait pu éviter de calculer suivant \vec{x} et \vec{z} en rappelant que le solide homogène possédant deux plans de symétrie, le centre d'inertie

est sur l'intersection des deux plans, soit ici (O, \vec{y}) .

$$y_{G_1} = \frac{2 \cdot \rho \cdot R_1^2 \cdot h}{3 \cdot m_1} = \frac{2 \cdot \rho \cdot R_1^2 \cdot h}{3 \cdot \rho \cdot \pi \cdot \frac{R_1^2}{2} \cdot h}$$

$$y_{G_1} = \frac{4 \cdot R_1}{3 \cdot \pi}$$

Remarque : Il aurait été ici, bien plus judicieux d'utiliser le théorème de Guldin pour une surface.



La rotation du demi disque génère une sphère :

$$V = 2 \cdot \pi \cdot R_G \cdot S$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3 = 2 \cdot \pi \cdot R_G \cdot \pi \cdot \frac{R_1^2}{2}$$

$$R_g = \frac{4 \cdot R_1}{3 \cdot \pi}$$

Q3. Déterminer la masse M du solide (V).

$$M = m_1 + m_2 = \frac{\rho \cdot h \cdot \pi}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$

Q4. Déterminer la position du centre d'inertie G_V en fonction de R_1 et R_2 et des autres dimensions

G_V est le barycentre des deux centres d'inertie

$$M \cdot \vec{OG}_V = m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2$$

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{OG}_V = \left(m_1 \cdot \frac{4 \cdot R_1}{3 \cdot \pi} - m_2 \cdot \frac{4 \cdot R_1}{3 \cdot \pi} \right) \cdot \vec{y}$$

$$\frac{\rho \cdot h \cdot \pi}{2} (R_1^2 + R_2^2) \cdot \vec{OG}_V = \frac{\rho \cdot h \cdot \pi}{2} \left(R_1^3 \cdot \frac{4}{3 \cdot \pi} - R_2^3 \cdot \frac{4}{3 \cdot \pi} \right) \cdot \vec{y}$$

$$\vec{OG}_V = \frac{4}{3 \cdot \pi} \left(\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2} \right) \cdot \vec{y}$$

Cor. 2 : Barrage voûte

Sujet page 26

Q1. Préciser les coordonnées du point P de la surface en contact avec l'eau du barrage en coordonnées cylindrique

$$\vec{OP} = R \cdot \vec{n} + z \cdot \vec{z}$$

avec

$$\vec{n} = \cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y} \text{ et } \theta \in [0, \pi]$$

$$z \in [-H, 0]$$

Q2. Déterminer $\vec{dF}_{e \rightarrow b}$ en fonction de \vec{n} , ds , ρ , et z_P la coordonnée suivant \vec{z} de P .

$$\vec{dF}_{e \rightarrow b} = -p(h) \cdot ds \cdot \vec{n} \quad \text{l'effort est opposé à } \vec{n}$$

$$\vec{dF}_{e \rightarrow b} = \rho \cdot g \cdot z \cdot ds \cdot \vec{n}$$

avec $h = -z$ et $ds = R \cdot d\theta dz$

Q3. Déterminer $\vec{F}_{e \rightarrow b}$, préciser les projections suivant \vec{x} et \vec{z} .

$$\begin{aligned}\vec{F}_{e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi \rho \cdot g \cdot z \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{n} \\ \vec{F}_{e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi \rho \cdot g \cdot z \cdot R \cdot (\cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}) \cdot d\theta \cdot dz \\ \vec{F}_{e \rightarrow b} &= \int_0^\pi \rho \cdot g \cdot \frac{H^2}{2} \cdot R \cdot (\cos \theta \cdot \vec{x} + \sin \theta \cdot \vec{y}) \cdot d\theta \\ \vec{F}_{e \rightarrow b} &= -\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

Q4. Déterminer le moment en O de l'action de l'eau sur le barrage.

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{e \rightarrow b} \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi (R \cdot \vec{n} + z \cdot \vec{z}) \wedge (\rho \cdot g \cdot z \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{n})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi (R \cdot \vec{n} + z \cdot \vec{z}) \wedge (\rho \cdot g \cdot z \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{n}) \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi (\rho \cdot g \cdot z^2 \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{t}) \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi (\rho \cdot g \cdot z^2 \cdot R \cdot d\theta \cdot dz \cdot (\cos \theta \cdot \vec{y} - \sin \theta \cdot \vec{x})) \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \int_{-H}^0 \int_0^\pi -\rho \cdot g \cdot z^2 \cdot R \cdot \sin \theta \cdot d\theta \cdot dz \cdot \vec{x} \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{H^3}{3} \cdot R \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

Q5. Déterminer le point Q pour lequel l'action de l'eau sur le barrage est modélisable par un glisseur.

On pose $\vec{OQ} = x_Q \cdot \vec{x} + y_Q \cdot \vec{y} + z_Q \cdot \vec{z}$

$$\vec{M}_{Q, e \rightarrow b} = \vec{M}_{O, e \rightarrow b} + \vec{OQ} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow b}$$

On cherche Q tel que $\vec{M}_{Q, e \rightarrow b} = \vec{0}$ d'où

$$\begin{aligned}-\vec{M}_{O, e \rightarrow b} &= \vec{OQ} \wedge \vec{F}_{e \rightarrow b} \\ 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{H^3}{3} \cdot R \cdot \vec{x} &= -(x_Q \cdot \vec{x} + y_Q \cdot \vec{y} + z_Q \cdot \vec{z}) \wedge (-\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{y}) \\ 2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{H^3}{3} \cdot R \cdot \vec{x} &= x_Q \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{z} - z_Q \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

finalement par identification on obtient $x_Q = 0, z_Q = -\frac{2}{3}H$ et $\forall y_Q$.

Q6. Donner le torseur de l'action de l'eau sur le barrage en O et en Q.

$$\begin{aligned}\{\mathcal{A}_{e \rightarrow b}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{e \rightarrow b} = -\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{O, e \rightarrow b} = -2 \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{H^3}{3} \cdot R \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_O \\ \{\mathcal{A}_{e \rightarrow b}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{e \rightarrow b} = -\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot R \cdot \vec{y} \\ \vec{M}_{Q, e \rightarrow b} = \vec{0} \end{array} \right\}_{\forall P \in (Q, \vec{y})}\end{aligned}$$

en Q le torseur est un glisseur.

Cor. 3 : Pince sensitive de robot

Sujet page 27

Q1. Montrer que $\delta(\theta)$ peut se mettre sous la forme :

$$\delta(\theta) = (R_2 - R_1) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)$$

avec $\cos \theta_0 = \frac{R_2 - R_1}{\delta_{max} + R_2 - R_1}$ et $\delta_{max} = \delta(\theta = 0)$

On écrit la fermeture géométrique en projection sur (\vec{u}_2, \vec{v}_2) :

$$\vec{C_2C_1} + \vec{C_1M} + \vec{MP} + \vec{PC_2} = \vec{0}$$

soit

$$\begin{cases} e \cdot \cos \theta - \delta(\theta) - R_2 + R_1 \cdot \cos \varphi = 0 \\ -e \cdot \sin \theta - R_1 \cdot \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

on considère φ est petit, on a donc $\cos \varphi = 1$ et $\sin \varphi = \varphi$, d'où

$$\begin{cases} e \cdot \cos \theta - \delta(\theta) - R_2 + R_1 = 0 \\ -e \cdot \sin \theta - R_1 \cdot \varphi = 0 \end{cases}$$

de la première équation, on peut déduire :

$$\delta(\theta) = e \cdot \cos \theta - R_2 + R_1$$

avec $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, δ_{max} est obtenu pour $\theta = 0^\circ$

$$\delta(0) = \delta_{max} = e - R_2 + R_1 \Rightarrow e = \delta_{max} + R_2 - R_1$$

pour θ_0

$$\delta(\theta_0) = e \cdot \cos \theta_0 - R_2 + R_1 \Rightarrow e = \frac{R_2 - R_1}{\cos \theta_0}$$

On a donc

$$\cos \theta_0 = \frac{R_2 - R_1}{R_2 - R_1 + \delta_{max}}$$

finalement

$$\begin{aligned}\delta(\theta) &= e \cdot \cos \theta - R_2 + R_1 \\ \delta(\theta) &= (R_2 - R_1) \cdot \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} - 1 \right)\end{aligned}$$

Q2. Préciser en fonction de $p(M)$ l'action élémentaire $d\vec{F}_{m \rightarrow p}$ = $d\vec{F}_{m \rightarrow p}$ appliqué au point M.

On a $p(M) = k \cdot \delta(\theta)$.

$$\begin{aligned}d\vec{F}_{m \rightarrow p} &= p(M) \cdot ds \cdot \vec{u}_\alpha \\ d\vec{F}_{m \rightarrow p} &= p(M) \cdot \lambda \cdot R_1 d\alpha \cdot \vec{u}_\alpha \quad \text{avec } \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0].\end{aligned}$$

Q3. Établir à l'aide du paramétrage donné par la figure ci-contre, la relation exprimant Y en fonction de $p_{max}, \lambda, \alpha_0$ et R_1 .

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m \rightarrow p} &= \lambda \cdot R_1 \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p(M) \cdot d\alpha \cdot \vec{u}_\alpha \\ \vec{F}_{m \rightarrow p} &= \lambda \cdot R_1 \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_{max} \cdot \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{y} + \sin \alpha \cdot \vec{x}) \cdot d\alpha \\ \vec{F}_{m \rightarrow p} &= \lambda \cdot R_1 \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_{max} \cdot \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{y} \\ &\quad + \lambda \cdot R_1 \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_{max} \cdot \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot \sin \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie, la seconde intégrale est nulle (je vous

laisse vérifier).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{m \rightarrow p}} &= \lambda \cdot R_1 \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_{max} \cdot \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{F_{m \rightarrow p}} &= \frac{\lambda \cdot R_1}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} p_{max} \cdot (\cos \alpha_0 \cdot \cos \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot d\alpha \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{F_{m \rightarrow p}} &= \lambda \cdot R_1 \frac{\cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 - \alpha_0}{\cos \alpha_0 - 1} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

Cor. 4 : Freinage Airbus

Sujet page 29

Q1. Exprimer l'effort presseur F auquel est soumis chaque face des disques de friction en fonction de Ph, Sp et Np.

$$F = N_p \cdot P_h \hat{S}_p$$

Q2. En déduire l'expression de la pression p, supposée uniforme, entre deux disques en contact.

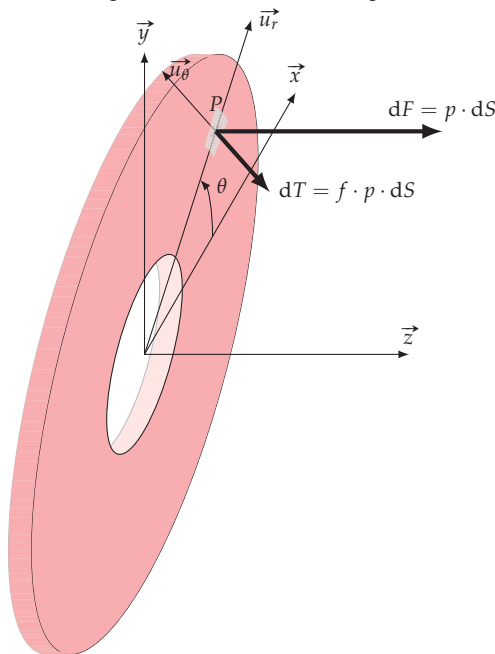
On appelle S_u la surface utile de frottement entre deux disques, si la pression est supposée uniforme alors :

$$p = \frac{F}{S_u} = \frac{F}{\pi \cdot (R_e^2 - R_i^2)}$$

Q3. Démontrer, en s'aidant des indications de la Figure 9.24, que la contribution au couple de freinage de deux surfaces en regard est donnée par l'expression :

$$C = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot f \cdot p \cdot (R_e^3 - R_i^3)$$

La description du modèle de freinage dans le sujet original est assez pauvre, complétons ce modèle avant de poser les calculs.



On reprend le schéma proposé par le sujet, on ajoute un repère orthonormé et on précise la base polaire. On considère que l'effort élémentaire représenté est celui du disque i sur le disque j .

On peut maintenant revenir à la définition du moment d'une action de pression.

$$\overrightarrow{M_{O,i \rightarrow j}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (dF \cdot \vec{z} - dT \cdot \vec{u}_\theta)$$

Remarque : les signes sont arbitraires, seulement imposés par le dessin et le choix des repères.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,i \rightarrow j}} &= \int_{P \in S} r \cdot \vec{u}_r \wedge (p \cdot dS \cdot \vec{z} - f \cdot p dS \cdot \vec{u}_\theta) \\ \overrightarrow{M_{O,i \rightarrow j}} &= - \int_{P \in S} r \cdot \vec{u}_\theta \cdot p \cdot dS - \int_{P \in S} r \cdot f \cdot p \cdot dS \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} r \cdot \vec{u}_\theta \cdot p \cdot dS &= \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} r \cdot \vec{u}_\theta \cdot p \cdot r d\theta dr \\ \int_{P \in S} r \cdot \vec{u}_\theta \cdot p \cdot dS &= \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} r \cdot (\cos \theta \cdot \vec{y} - \sin \theta \cdot \vec{x}) \cdot p \cdot r d\theta dr \\ \int_{P \in S} r \cdot \vec{u}_\theta \cdot p \cdot dS &= \vec{0} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{P \in S} r \cdot f \cdot p \cdot dS \cdot \vec{z} &= \int_{R_i}^{R_e} \int_0^{2\pi} r \cdot f \cdot p \cdot r d\theta dr \cdot \vec{z} \\ \int_{P \in S} r \cdot f \cdot p \cdot dS \cdot \vec{z} &= 2 \cdot \pi \cdot \int_{R_i}^{R_e} r^2 \cdot f \cdot p \cdot dr \cdot \vec{z} \\ - \int_{P \in S} r \cdot f \cdot p \cdot dS \cdot \vec{z} &= \frac{2}{3} f \cdot p \cdot \pi \cdot (R_e^3 - R_i^3) \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat cherché.

$$C = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot f \cdot p \cdot (R_e^3 - R_i^3)$$

Q4. Déterminer C en fonction de l'effort F développé par les pistons.

$$C = \frac{2}{3} \cdot f \cdot F \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$

Q5. En déduire le couple total C_T exercé par les N_d disques du système de freinage d'une roue en fonction de P_h et des données géométriques et de frottement.

Les couples exercés par chaque surface frottante s'ajoutent, on a donc

$$C_T = \frac{2}{3} \cdot (N_d - 1) \cdot f \cdot F \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}$$