### 2.9.1 Corrigés

#### Cor. 5: Éolienne

*Sujet page 33*

**Q1.** Le solide 1 possède un plan de symétrie $(O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{z_1})$ , les deux produits d'inertie comportant $\overrightarrow{y_1}$ sont donc nuls.

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_A(S_1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\substack{A \\ (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})}}$$

**Q2a.** Relation entre $\lambda$, $\mu$ et les masses

$$\begin{aligned} m_2\overrightarrow{AG_2} &= m_{2a} \cdot \overrightarrow{AG_{2a}} + m_{2b} \cdot \overrightarrow{AG_{2b}} \\ &= m_{2a} \cdot \left(\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2G_{2a}}\right) + m_{2b} \cdot \left(\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2G_{2b}}\right) \\ \overrightarrow{0} &= m_{2a} \cdot \overrightarrow{G_2G_{2a}} + m_{2b} \cdot \overrightarrow{G_2G_{2b}} = \left(\lambda \cdot m_{2a} + \mu \cdot m_{2b}\right) \cdot \overrightarrow{x_2} \\ \lambda \cdot m_{2a} &= -\mu \cdot m_{2b} \end{aligned}$$

**Q2b.** Le solide $2_a$ est modélisé par un cylindre d'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$, donc

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_{G_{2a}}(2a)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, m_{2a} \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right) \end{pmatrix}_{\substack{G_{2a} \\ (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}}$$

**Q2c.** Le solide $2_b$ est modélisé par une plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable, donc

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_{G_{2b}}(2_b)}} = \begin{pmatrix} m_{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2b} \cdot \frac{b^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m_{2b} \cdot \frac{a^2}{12} \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})}}$$

**Q2d.** On déplace, grâce au théorème de Huygens les deux matrices d'inertie en $G_2$.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathscr{I}_{G_2}(2a)}} &= \overline{\overline{\mathscr{I}_{G_{2a}}(2a)}} + m_{2a} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\, m_{2a} \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \lambda^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & m_{2a} \cdot \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} + \lambda^2\right) \end{pmatrix}_{\substack{G_{2a} \\ \mathscr{B}_2}} \\ \overline{\overline{\mathscr{I}_{G_2}(2b)}} &= \overline{\overline{\mathscr{I}_{G_{2b}}(2b)}} + m_{2b} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{2b} = m_{2b} \cdot \frac{a^2+b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} = m_{2b} \cdot \left(\frac{b^2}{12} + \mu^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} = m_{2b} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \mu^2\right) \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ \mathscr{B}_2}} \end{aligned}$$

on pose

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_{G_2}(2a)}} = \begin{pmatrix} A_{2a} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2a} & 0 \\ 0 & 0 & B_{2a} \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ \mathscr{B}_2}} \text{ et } \overline{\overline{\mathscr{I}_{G_2}(2b)}} = \begin{pmatrix} A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_{2b} \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ \mathscr{B}_2}}$$

finalement

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_{G_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 = A_{2a} + A_{2b} & 0 & 0 \\ 0 & B_2 = B_{2a} + B_{2b} & 0 \\ 0 & 0 & C_2 = B_{2a} + C_{2b} \end{pmatrix}_{\substack{G_2 \\ \mathscr{B}_2}}$$

**Q3.** Le point A est un point fixe dans le mouvement de $S_1$ par rapport au répère $R_0$, on sait alors que

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = \overline{\overline{\mathscr{I}_{A_1}(S_1)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}}.$$

En A dans la base $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$.

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

d'où $\left\{\mathscr{C}_{S_1}\right\} R_0 = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{p_{S_1/R_0}} = \overrightarrow{0} \\ B \end{matrix} \right\}_C \overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} A$

**Q4.** En A point fixe, on peut écrire

$$\overrightarrow{\delta_{A_1,S_1/R_0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A_1,S_1/R_0}} \right]_{R_0} = -E_1 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} - E_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \overrightarrow{y_1} + C_1 \cdot \ddot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{A_1,S_1/R_0}} \cdot \overrightarrow{z_0} = C_1 \cdot \ddot{\alpha}$$

**Q5.** En $G_2$, centre d'inertie de $S_2$ on peut écrire

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,S_2/R_0}} = \overline{\overline{\mathscr{I}_{A_2}(S_2)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \overline{\overline{\mathscr{I}_{A_2}(S_2)}} \cdot \left( \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} \right)$$

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}}$ doit être écrit dans la même base que la matrice d'inertie $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$.

$$\overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_1} = \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{z_2} + \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_2}$$

En $G_2$ dans la base $(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$

$$\overrightarrow{\sigma_{G_2,S_2/R_0}} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \\ \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \end{pmatrix} = A_2 \cdot \dot{\beta} \overrightarrow{x_2} + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \overrightarrow{z_2}$$

d'où le torseur cinétique

$$\left\{\mathscr{C}_{S_2/R_0}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{p_{S_2/R_0}} = m_2 \cdot \overrightarrow{V_{G_2 \in S_2/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_2,S_2/R_0}} \end{matrix} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} m_2 \cdot l \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ A_2 \cdot \dot{\beta} \overrightarrow{x_2} + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \overrightarrow{z_2} \end{matrix} \right\}_{G_2}$$

**Q6.** On a $T_{\{S_1,S_2\}} R_0 = T_{S_1} R_0 + T_{S_2} R_0$, avec $T_{S_1} R_0 = \left\{\mathscr{C}_{S_1}\right\} R_0 \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_1}\right\} R_0$ et $T_{S_2} R_0 = \left\{\mathscr{C}_{S_2}\right\} R_0 \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2}\right\} R_0$, l'énergie cinétique ne dépendant pas du point de calcul, il est judicieux de calculer $T_{S_1} R_0 =$ en A et $T_{S_2} R_0$ en $G_2$.

$$\begin{aligned}
T_{S_1/R_0} &= \left\{\mathscr{C}_{S_1}\right\} R_0 \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_1}\right\} R_0 \\
&= \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{p_{S_1/R_0}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S_1/R_0}} = -E_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_1} + C_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \end{matrix} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_A = C_1 \cdot \dot{\alpha}^2 \\
T_{S_2/R_0} &= \left\{\mathscr{C}_{S_2}\right\} R_0 \otimes \left\{\mathscr{V}_{S_2}\right\} R_0 = \left\{ \begin{matrix} m_2 \overrightarrow{V_{G_2 \in S_2/R_0}} \\ \overrightarrow{\sigma_{G_2,S_2/R_0}} \end{matrix} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S_2/R_0}} \\ \overrightarrow{V_{G_2 \in S_2/R_0}} \end{matrix} \right\}_{G_2} \\
&= \left\{ \begin{matrix} m_2 \cdot l \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_1} \\ A_2 \cdot \dot{\beta} \overrightarrow{x_2} + B_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{y_2} + C_2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \overrightarrow{z_2} \end{matrix} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_0} + \dot{\beta} \cdot \overrightarrow{x_1} \\ l \cdot \dot{\alpha} \overrightarrow{y_1} \end{matrix} \right\}_{G_2} \\
&= A_2 \cdot \dot{\beta}^2 + B_2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin^2\beta \cdot + C_2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2\beta + m_2 \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha}^2
\end{aligned}$$

## Cor. 6: Pompe à palettes - cinétique

*Sujet page 34*

**Q1.** $\left\{\mathscr{V}_{2/1}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{0} \end{matrix} \right\}_{O_2}$

Pour le solide 3, on a $\overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et

$\overrightarrow{V_{E \in 3/1}} = \frac{d\overrightarrow{O_1E}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_2D}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{DE}}{dt} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_2} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2}$

d'où le torseur cinématique en E $\left\{\mathscr{V}_{3/1}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V_{E \in 3/1}} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_2} + \lambda \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2} \end{matrix} \right\}_E$.

et en G $\left\{\mathscr{V}_{3/1}\right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{3/1}} = \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \overrightarrow{V_{G \in 3/1}} = -d \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{x_2} + \dot{\lambda} \cdot \overrightarrow{x_2} + \left(\lambda - \frac{l}{2}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \overrightarrow{y_2} \end{matrix} \right\}_G$.

**Q2.** On écrit la fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2D} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EO_1} = \overrightarrow{0} \rightarrow -e \cdot \overrightarrow{x_1} + d \cdot \overrightarrow{y_2} + \lambda \cdot \overrightarrow{x_2} + \overrightarrow{EO_1} = \overrightarrow{0}.$$

On pose $\overrightarrow{O_1E} = R \cdot \cos\theta \cdot \overrightarrow{x_1} + R \cdot \sin\theta \cdot \overrightarrow{y_1}$ ce qui permet d'écrire :

$$-e \cdot \overrightarrow{x_1} + d \cdot \overrightarrow{y_2} + \lambda \cdot \overrightarrow{x_2} - R \cdot \cos\theta \cdot \overrightarrow{x_1} - R \cdot \sin\theta \cdot \overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{0}$$

d'où l'on déduit les deux équations scalaires projetées sur $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$ :

$$\begin{cases} -e-d\cdot\sin\alpha+\lambda\cdot\cos\alpha+\mathrm{R}\cdot\cos\theta=0 \\ d\cdot\cos\alpha+\lambda\cdot\sin\alpha+\mathrm{R}\cdot\sin\theta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = e\cdot\cos(\alpha)\pm\sqrt{e^2\cdot(\cos(\alpha)^2-1)-2\cdot e\cdot d\cdot\sin(\alpha)+\mathrm{R}^2-d^2} \\ \tan\theta=\dfrac{d\cdot\cos\alpha+\lambda\cdot\sin\alpha}{-e-d\cdot\sin\alpha+\lambda\cdot\cos\alpha} \end{cases}$$

Seule la valeur positive de $\lambda$ a un sens technologique.

**Q3.** $\mathrm{O}_2$ est un point fixe dans le repère galiléen,

$$\left\{\mathscr{C}_{2/1}\right\}=\begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}_2,2/1}}=\overline{\overline{\mathscr{I}_{\mathrm{O}_2}(2/1)}}\cdot\overrightarrow{\Omega_{2/1}} \end{Bmatrix}_{\mathrm{O}_2}=\begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{O}_2,2/1}}=\mathrm{C}_2\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}2 \end{Bmatrix}_{\mathrm{O}_2}$$

$$\left\{\mathscr{D}_{2/1}\right\}=\begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\delta_{\mathrm{O}_2,2/1}}=\mathrm{C}_2\cdot\ddot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}2 \end{Bmatrix}_{\mathrm{O}_2}$$

**Q4.** Il est judicieux ici d'écrire la matrice en G dans la base $\mathscr{B}_2$.

$$\overline{\overline{\mathscr{I}_{\mathrm{G}}(3)}}=\begin{pmatrix} \mathrm{A}_3=m_3\cdot\frac{h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B}_3=m_3\cdot\frac{l^2+h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C}_3=m_3\cdot\frac{l^2}{12} \end{pmatrix}_{\mathrm{G}\,(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})}$$

**Q5.** $\left\{\mathscr{C}_{3/1}\right\}=\begin{Bmatrix} m_3\cdot\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{G}\in 3/1}} \\ \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{G},3/1}} \end{Bmatrix}_{\mathrm{G}}=\begin{Bmatrix} -d\cdot m_3\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot\dot{\lambda}\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot\left(\lambda-\frac{l}{2}\right)\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{\sigma_{\mathrm{G},3/1}}=\mathrm{C}_3\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{z}2 \end{Bmatrix}_{\mathrm{G}}$

**Q6.** En G, il suffit de dériver le torseur cinétique.

$$\left\{\mathscr{D}_{3/1}\right\}=\begin{Bmatrix} m_3\cdot\overrightarrow{\Gamma_{\mathrm{G}\in 3/1}} \\ \overrightarrow{\delta_{\mathrm{G},3/1}} \end{Bmatrix}_{\mathrm{G}}=\begin{Bmatrix} -d\cdot m_3\cdot\omega^2\cdot\overrightarrow{y_2}+m_3\cdot\ddot{\lambda}\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot\dot{\lambda}\cdot\omega\overrightarrow{y_2}-m_3\cdot\left(\lambda-\frac{l}{2}\right)\cdot\omega^2\cdot\overrightarrow{x_2}+m_3\cdot\dot{\lambda}\cdot\dot{\alpha}\cdot\overrightarrow{y_2} \\ \overrightarrow{\delta_{\mathrm{G},3/1}}=\overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_{\mathrm{G}}$$