

2.4 Exercices

Exercice 1- Quart de disque

Corrigé page 20

Adapté du Concours National DEUG - CCP

Soit une plaque (P) en forme d'un quart de disque de rayon a et d'épaisseur négligeable devant le rayon a . On note μ la masse surfacique du matériau constituant la plaque (P).

Le référentiel terrestre \mathcal{R}_0 est considéré comme galiléen ; il est rapporté au repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Q1. Déterminer la masse M de la plaque (P) en fonction de μ et a .

Q2. Déterminer l'opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}}}_O(P)$ de la plaque (P) au point O dans $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction de M et a .

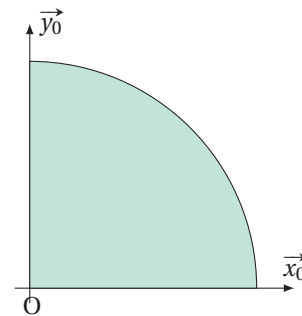


FIGURE 2.11 – Quart de disque

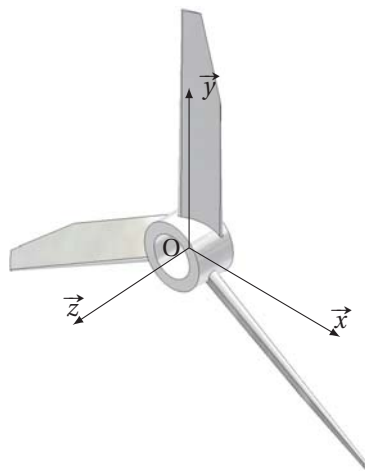
Q3. Déterminer les axes principaux d'inertie de la plaque (P), préciser les vecteurs de la base principale.

Q4. En déduire les moments d'inertie principaux J_1 , J_2 et J_3 de la plaque (P) au point O en fonction de M et a .

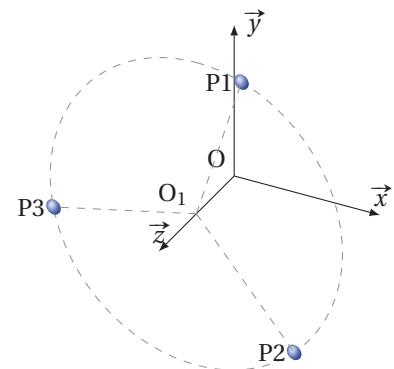
Exercice 2- Hélice tripale

Corrigé page 20

Soit l'hélice tripale définie sur la figure 2.12.



(a) Hélice



(b) Masses ponctuelles réparties

FIGURE 2.12 – Hélice tripale

Q1. Montrez que la matrice d'inertie de trois masses ponctuelles régulièrement réparties sur un cercle de rayon R est diagonale.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_1 = R \cdot \cos(\theta) \\ b_1 = R \cdot \sin(\theta) \\ c_1 = z \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} a_2 = R \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ b_2 = R \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ c_2 = z \end{pmatrix} \text{ et } P_3 = \begin{pmatrix} a_3 = R \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ b_3 = R \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ c_3 = z \end{pmatrix}.$$

Q2. En déduire que la matrice d'inertie d'une hélice tripale est diagonale en tout point de l'axe.

Exercice 3- Volant d'inertie

Corrigé page 21

Un volant d'inertie en acier (7800 kg m^{-3}) est constitué :

- d'une couronne circulaire à base carrée (coté $2c$) et de rayon extérieur $R_e = 10 \cdot c$,
- d'un moyeu central de rayon $R_m = c$ de hauteur $2c$,
- de trois bras à 120° de section carrée (coté c).

Q1. Déterminer la masse du volant d'inertie en fonction de c .

Q2. Déterminer le moment d'inertie du volant autour de l'axe de rotation en fonction de c .

Nota : les bras seront modélisés par des parallélépipèdes tangents à la couronne et au moyeu.

Q3. A.N. $c = 5 \text{ cm}$.

Q4. Déterminer la masse du disque d'épaisseur $2c$ ayant le même moment d'inertie. Conclure.



FIGURE 2.13 – Volant d'inertie

Exercice 4- Sphéricône

Corrigé page 22

On obtient un sphéricône (figure 2.14) à partir d'un double - cône de 90° d'angle au sommet coupé en deux par un plan passant par l'axe puis recollé après une rotation de 90° .

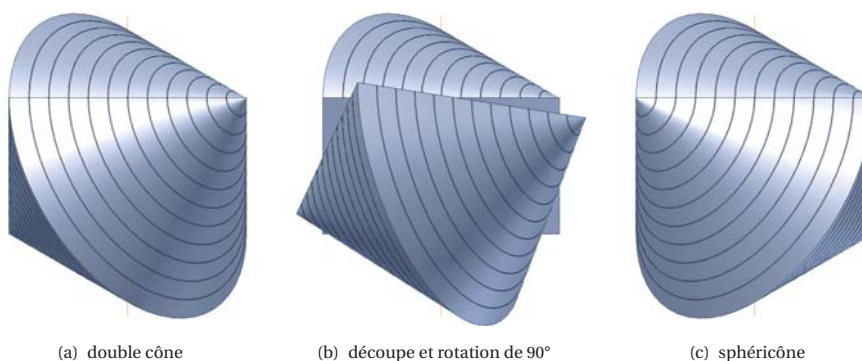


FIGURE 2.14 – Du double cône au sphéricône

On se propose de déterminer les caractéristiques cinétiques du sphéricône et de les comparer à celle du double-cône.

Le sphéricône peut se décomposer en 4 demi - cônes de rayon R et de demi - angle au sommet 45° .

- Q1.** Déterminer par des considérations géométriques la position du centre d'inertie G et la forme de la matrice d'inertie du sphéricône en G (préciser la base).
- Q2.** Précisez la forme de la matrice d'inertie d'un demi - cône en O dans la base.
- Q3.** En déduire celle du sphéricône.
- Q4.** Déterminez la matrice d'inertie du demi-cône en ne calculant que les termes utiles pour la matrice du sphéricône puis celle du celle du sphéricône. Écrire cette matrice en fonction de M_c , la masse du double cône.

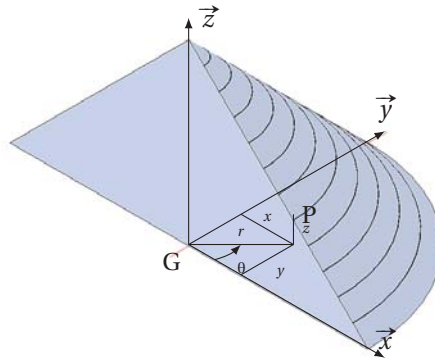


FIGURE 2.15 – Paramétrage du sphéricône

2.4.1 Corrigés

Cor. 1: Quart de disque

Sujet page 17

Q1. $M = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 \cdot \mu$

Q2. L'épaisseur est négligeable, donc les deux produits d'inertie contenant z sont nuls.

$$\overline{\mathcal{I}_O(p)} = \begin{pmatrix} J_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}_O \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Avec

$$J_x = \int_T (y^2 + z^2) dm, \quad J_y = \int_T (x^2 + z^2) dm, \quad J_z = \int_T (x^2 + y^2) dm \quad \text{et} \quad P_{xy} = \int_T x \cdot y dm$$

l'épaisseur étant négligeable ($z = 0$)

$$J_x = \int_T y^2 dm, \quad J_y = \int_T x^2 dm \quad \text{et} \quad J_z = \int_T x^2 + y^2 dm = J_x + J_y$$

On se place en coordonnées polaires

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad dm = \mu \cdot r \cdot d\theta dr \quad \text{et} \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$J_x = \int_T y^2 dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \mu \cdot r \cdot d\theta dr = \mu \cdot \frac{\pi \cdot a^4}{16} = M \cdot \frac{a^2}{4}$$

$$J_y = \int_T x^2 dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \mu \cdot r \cdot d\theta dr = \mu \cdot \frac{\pi \cdot a^4}{16} = M \cdot \frac{a^2}{4} = J_x$$

$$J_z = J_x + J_y = M \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$P_{xy} = \int_T x \cdot y dm = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \mu \cdot r \cdot d\theta dr = \mu \cdot \frac{a^4}{8} = M \cdot \frac{a^2}{2 \cdot \pi}$$

Q3. Le plan perpendiculaire au plan $((O, \vec{x}_0, \vec{y}_0))$ passant par la droite (O, \vec{x}_1) avec $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = 45^\circ$ est plan de symétrie du quart de disque, dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, la matrice d'inertie est diagonale, les axes \vec{x}_1, \vec{y}_1 et \vec{z}_1 sont les axes principaux d'inertie.

Q4. Pour calculer les coefficients de la matrice d'inertie dans la base principale, il suffit soit de faire un changement de base, soit de déterminer chaque moment d'inertie par rapport aux axes de la nouvelle base. Nous savons que :

$$J_1 = \vec{x}_1 \cdot (\overline{\mathcal{I}_O(T)} \cdot \vec{x}_1) \quad J_2 = \vec{y}_1 \cdot (\overline{\mathcal{I}_O(T)} \cdot \vec{y}_1) \quad J_3 = \vec{z}_0 \cdot (\overline{\mathcal{I}_O(T)} \cdot \vec{z}_0) = J_z$$

d'où

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & J_x & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}_O \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = J_x - P_{xy} = M \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \right)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_x & -P_{xy} & 0 \\ -P_{xy} & J_x & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}_O \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = J_x + P_{xy} = M \cdot a^2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right)$$

Cor. 2: Hélice tripale

Sujet page 17

Q1.

À partir du théorème de Huygens on cherche la matrice d'inertie de ces trois masses ponctuelles en O, pour P_1 , la matrice s'écrit :

$$\overline{\mathcal{I}_O(P_1)} = m \cdot \begin{pmatrix} b_1^2 + c_1^2 & -a_1 \cdot b_1 & -a_1 \cdot c_1 \\ -a_1 \cdot b_1 & a_1^2 + c_1^2 & -b_1 \cdot c_1 \\ -a_1 \cdot c_1 & -b_1 \cdot c_1 & a_1^2 + b_1^2 \end{pmatrix}_O \quad \text{d'où la matrice de l'ensemble } \Sigma \text{ des trois masses.}$$

$$\overline{\mathcal{I}_O(\Sigma)} = m \cdot \begin{pmatrix} A_\Sigma & F_\Sigma & E_\Sigma \\ F_\Sigma & B_\Sigma & D_\Sigma \\ E_\Sigma & D_\Sigma & C_\Sigma \end{pmatrix}_O \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} A_{\Sigma} &= (b_1^2 + c_1^2) + (b_2^2 + c_2^2) + (b_3^2 + c_3^2) \\ C_{\Sigma} &= (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) \\ E_{\Sigma} &= (-a_1 \cdot c_1) + (-a_2 \cdot c_2) + (-a_3 \cdot c_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{\Sigma} &= (a_1^2 + c_1^2) + (a_2^2 + c_2^2) + (a_3^2 + c_3^2) \\ D_{\Sigma} &= (-b_1 \cdot c_1) + (-b_2 \cdot c_2) + (-b_3 \cdot c_3) \\ F_{\Sigma} &= (-a_1 \cdot b_1) + (-a_2 \cdot b_2) + (-a_3 \cdot b_3) \end{aligned}$$

Il faut que les produits d'inertie soient nuls pour que la matrice soit diagonale.

$$\begin{aligned} D_{\Sigma} &= (-b_1 \cdot c_1) + (-b_2 \cdot c_2) + (-b_3 \cdot c_3) \\ &= (-R \cdot \sin(\theta) \cdot z) + \left(-R \cdot \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot z\right) + \left(-R \cdot \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot z\right) \\ &= -R \cdot z \left(\sin(\theta) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta)\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta)\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On montre de même que $E_{\Sigma} = 0$ et $F_{\Sigma} = 0$. La matrice d'inertie des trois masses est donc diagonale.

Q2. Il est donc évident, à partir du résultat précédent que la matrice d'inertie de l'hélice tripale est diagonale. En effet, il est toujours possible pour chaque point P_1 appartenant à la pale 1 pale d'associer les points P_2 et P_3 des pales 2 et 3 respectant les conditions du calcul précédent.

Ce résultat se généralise à toute hélice de n pales identiques réparties régulièrement.

Cor. 3: Volant d'inertie

Sujet page 18

On pose (O, \vec{x}) l'axe de rotation du moyeu et ρ la masse volumique.

Q1. Masse voir plus bas

Q2. Moment d'inertie Le volant d'inertie se décompose en 5 volumes élémentaires.

- le moyeu
 - Masse : $M_{moy} = 2\pi \cdot R_m^2 \cdot c \cdot \rho = 2\pi \cdot c^3 \cdot \rho$.
 - Moment d'inertie, le moyeu est cylindrique, donc $I_{(O, \vec{x})}(moy) = \frac{1}{2} M_{moy} c^2$ soit

$$I_{(O, \vec{x})}(moy) = \pi \cdot \rho \cdot c^5$$

- la couronne
 - Il est plus facile pour les calculs de considérer la couronne comme un cylindre de rayon R_e auquel on soustrait un cylindre de même axe de rayon $R_e - 2 \cdot c$ et d'épaisseur $2c$
 - Masse $M_{cou} = M_{cyl_{ext}} - M_{cyl_{int}} = 2\pi \cdot R_e^2 \cdot c \cdot \rho - 2\pi \cdot (R_e - 2 \cdot c)^2 \cdot c \cdot \rho$ soit $M_{cou} = 72\pi \cdot \rho \cdot c^3$
 - Moment d'inertie

$$I_{(O, \vec{x})}(cou) = I_{(O, \vec{x})}(cyl_{ext}) - I_{(O, \vec{x})}(cyl_{int}) \text{ avec}$$

$$I_{(O, \vec{x})}(cyl_{ext}) = \frac{1}{2} M_{cyl_{ext}} \cdot R_e^2 = 50 \cdot M_{cyl_{ext}} \cdot c^2$$

le moment d'inertie du cylindre extérieur de rayon $R_e = 10c$

$$I_{(O, \vec{x})}(cyl_{ext}) = 50 \cdot \pi \rho (10 \cdot c)^2 \cdot 2 \cdot c \cdot c^2 = 10000 \cdot \pi \rho \cdot c^5$$

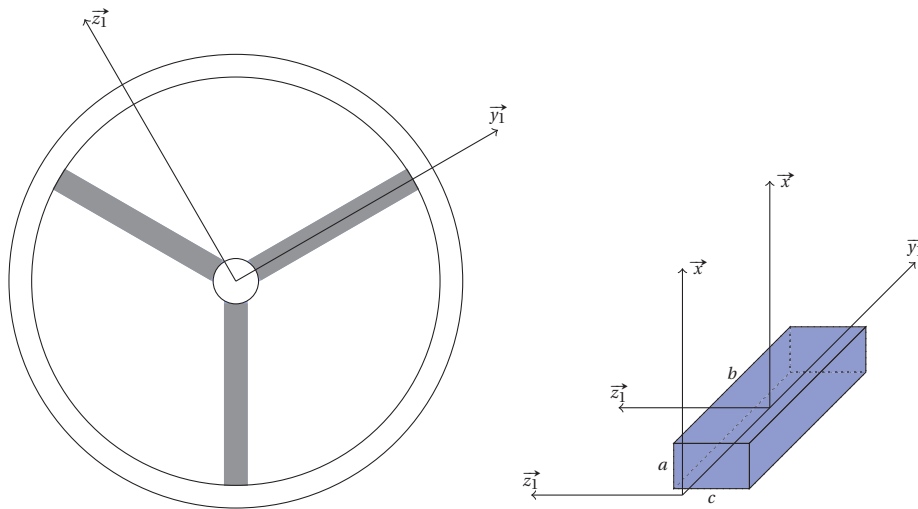
$$I_{(O, \vec{x})}(cyl_{int}) = \frac{1}{2} M_{cyl_{int}} \cdot (R_e - 2c)^2 = 32 \cdot M_{cyl_{int}} \cdot c^2$$

le moment d'inertie du cylindre intérieur de rayon $R_e - 2 \cdot c = 8c$

$$I_{(O, \vec{x})}(cyl_{int}) = 32 \cdot \pi \rho (8 \cdot c)^2 \cdot 2 \cdot c \cdot c^2 = 4096 \cdot \pi \rho \cdot c^5$$

$$I_{(O, \vec{x})}(cou) = 5904 \cdot \pi \rho \cdot c^5$$

- les 3 bras
 - Chaque bras est modélisé par un parallélépipède (on néglige les raccords entre le moyeu et le bras et la couronne) de dimension $(c, 7c, c)$, à chaque bras, on associe un repère local, $(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ $y_1 z_1$ pour le bras B_1 .



On sait que le moment d'inertie autour d'un axe (G, \vec{x}) passant par le centre d'inertie d'un parallélépipède (a, b, c) s'écrit $I_{(G, \vec{x})}(\text{para}) = M \frac{b^2 + c^2}{12}$, soit ici pour le bras B_1 , compte tenu des dimensions $I_{(G, \vec{x})}(B_1) = M_{B_1} \frac{(7c)^2 + c^2}{12} = 50 \cdot M_{B_1} c^2$ avec $M_{B_1} = 7 \cdot \rho \cdot c^3$. Il reste à déplacer ce moment autour de l'axe (O, \vec{x}) en utilisant le théorème de Huygens $I_{(O, \vec{x})}(B_1) = I_{(G, \vec{x})}(B_1) + M_{B_1} d^2$ avec $d = 4,5c$ la distance entre les axes (G, \vec{x}) et (O, \vec{x}) .

$$I_{(O, \vec{x})}(B_1) = 50 \cdot M_{B_1} c^2 + M_{B_1} (4,5c)^2 = 50 \cdot 7 \cdot \rho \cdot c^5 + 7 \cdot \rho (4,5)^2 \cdot c^5 = 370,25 \cdot \rho \cdot c^5$$

Finalement

- Masse du volant $M_{Vol} = M_{moy} + M_{cou} + 3 \cdot M_{B_1} = 2\pi \cdot \rho \cdot c^3 + 72\pi \cdot \rho \cdot c^3 + 21 \cdot \rho \cdot c^3$

$$M_{Vol} = (74\pi + 21) \cdot \rho \cdot c^3$$

- Moment d'inertie du volant $I_{(O, \vec{x})}(Vol) = I_{(O, \vec{x})}(moy) + I_{(O, \vec{x})}(cou) + 3 \cdot I_{(O, \vec{x})}(bras)$

$$I_{(O, \vec{x})}(Vol) = \pi \cdot \rho \cdot c^5 + 5904 \cdot \pi \rho \cdot c^5 + 3 \cdot 370,25 \cdot \rho \cdot c^5 = (5905 \cdot \pi + 1110,75) \cdot \rho \cdot c^5$$

Q3. A.N.

- Masse du volant $M_{Vol} = (74\pi + 21) \cdot \rho \cdot c^3 \approx 247 \text{ kg}$
- Moment d'inertie du volant $I_{(O, \vec{x})}(Vol) = (5905 \cdot \pi + 1110,75) \cdot \rho \cdot c^5 \approx 47,2 \text{ kgm}^2$

Q4. Le cylindre de même inertie est tel que $I_{(O, \vec{x})}(Vol) = \frac{1}{2} M_{cyl} \cdot R_{cyl}^2$ avec $M_{cyl} = 2\pi \cdot c \cdot R_{cyl}^2$ ce qui donne

- pour le rayon $R_{cyl} \approx 0,44 \text{ m}$,
- pour la masse $M_{cyl} \approx 483 \text{ kg}$

On constate que pour un encombrement quasi identique (on passe de $R_e = 50 \text{ cm}$ à $R_{cyl} \approx 44 \text{ cm}$) la masse est presque doublée. Le moment d'inertie d'un solide est d'autant plus important que la masse est éloignée de l'axe.

Cor. 4: Sphéricône

Sujet page 18

Q1. Le centre d'inertie du sphéricône est le même que celui du double cône. Le sphéricône possède deux plans de symétrie, la matrice est donc diagonale.

Q2. Le demi-cône défini sur la figure 2.16(a) ne possède qu'un seul plan de symétrie, le plan (\vec{y}, G, \vec{z}) . La matrice en a donc la forme suivante pour le demi-cône compris dans le quadrant $y > 0, z > 0$:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & -D_1 \\ 0 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G, \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}}$$

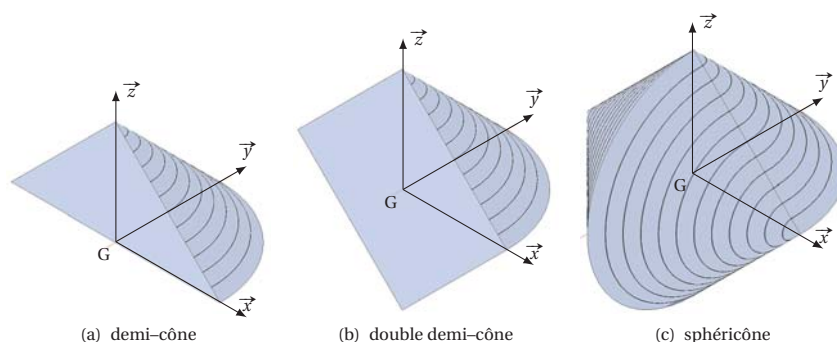


FIGURE 2.16 – Éléments du sphéricône

Q3. En déduire celle du sphéricône. Le demi-cône symétrique par rapport au plan (\vec{x}, G, \vec{z}) est obtenu en effectuant le changement de variable $z \rightarrow -z$ dans le calcul des coefficients du premier demi-cône.

Les trois coefficients de la diagonale sont inchangés (terme en z^2) par contre le produit d'inertie change de signe (terme en z). La matrice du demi-cône compris dans le quadrant $y > 0, z < 0$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & D_1 \\ 0 & D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On obtient la matrice d'inertie du double demi-cône () en sommant les deux matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot C_1 \end{pmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Le double demi-cône possède deux plans de symétrie, la matrice est diagonale.

L'autre double demi-cône s'obtient par une rotation de 90° autour de l'axe (G, \vec{y}) et une symétrie par rapport au plan (\vec{x}, g, \vec{z}) , la matrice s'obtient donc en permutant les moments d'inertie suivant les (G, \vec{x}) et (G, \vec{z}) pour la rotation, la symétrie ne modifiant pas les coefficients de la diagonale, on obtient finalement pour la matrice d'inertie du sphéricône :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{J}}_G(S_c) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot C_1 \end{pmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} + \begin{pmatrix} 2 \cdot C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot A_1 \end{pmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot A_1 + 2 \cdot C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot A_1 + 2 \cdot C_1 \end{pmatrix}_{G, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \end{aligned}$$

Q4. Seuls les trois moments d'inertie du demi-cône doivent être calculés.

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{ cone}} y^2 + z^2 dm, \quad B_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{ cone}} x^2 + z^2 dm, \quad C_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{ cone}} x^2 + y^2 dm.$$

Il est préférable, compte tenu de la symétrie de révolution, de calculer les moments d'inertie en coordonnées polaires, à partir du paramétrage de la figure 2.15.

$$\text{coordonnées polaires : } \begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\text{élément de masse : } dm = \rho \cdot r d\theta \cdot dr \cdot dz$$

$$\text{bornes d'intégration : } \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq z \leq h \text{ avec } h = R \quad \text{et} \quad R(z) = R - z \text{ rayon du demi-cône pour la cote } z. \\ 0 \leq r \leq R(z) \end{cases}$$

Les variables d'intégration ne sont pas indépendantes, il est obligatoire d'intégrer suivant r avant z .

on écrit donc :

$$A_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{cône}} y^2 + z^2 dm = \int_0^R \int_0^{R-z} \int_0^\pi (r^2 \cdot \sin^2(\theta) + z^2) \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$$

$$B_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{cône}} x^2 + z^2 dm = \int_0^R \int_0^{R-z} \int_0^\pi (r^2 \cdot \cos^2(\theta) + z^2) \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$$

$$C_1 = \int_{\frac{1}{2} \text{cône}} x^2 + y^2 dm = \int_0^R \int_0^{R-z} \int_0^\pi r^2 \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$$

Détermination de A_1 :

$$A_1 = \int_0^R \int_0^{R-z} \int_0^\pi (r^2 \cdot \sin^2(\theta) + z^2) \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz$$

$$A_1 = \int_0^R \int_0^{R-z} \left(r \cdot z^2 \pi + \frac{1}{2} \cdot r^3 \right) \rho \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \rho \cdot \pi \int_0^R \left(\frac{1}{2} \cdot z^2 (R-z)^2 + \frac{1}{8} (R-z)^4 \right) dz$$

finalement

$$A_1 = \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5 \quad \text{de même} \quad B_1 = \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5 \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{1}{20} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5.$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathcal{J}_G(Sc)}} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot A_1 + 2 \cdot C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \cdot B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot A_1 + 2 \cdot C_1 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{11}{60} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{60} \cdot \rho \cdot \pi \cdot R^5 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \end{aligned}$$

La masse du double cône est

$$M_c = 2 \cdot \int_{\text{cône}} dm = 2 \cdot \int_0^R \int_0^{R-z} \int_0^{2\pi} \rho \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{2}{3} \rho \cdot \pi \cdot R^3$$

d'où

$$\overline{\overline{\mathcal{J}_G(Sc)}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{40} \cdot M_c \cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \cdot M_c \cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{40} \cdot M_c \cdot R^2 \end{pmatrix}_{G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}.$$