

# Cinématique du solide

La cinématique du solide est l'étude des mouvements des corps solides indépendamment des causes de ces mouvements.

## 7.1 Coordonnées d'un point dans l'espace

### 7.1.1 Repère et référentiel

On montre qu'il est possible de décrire de manière unique la position d'un point dans l'espace à partir de sa projection dans un repère constitué d'un point origine et d'une base de trois vecteurs orthonormés (orthogonaux et de norme unitaire).

Lorsque les trois vecteurs sont orientés dans le sens direct, on dit que l'on a un repère orthonormé direct. La figure 7.1 présente deux repères orthonormés directs et la méthode de la main droite pour tracer un repère direct.

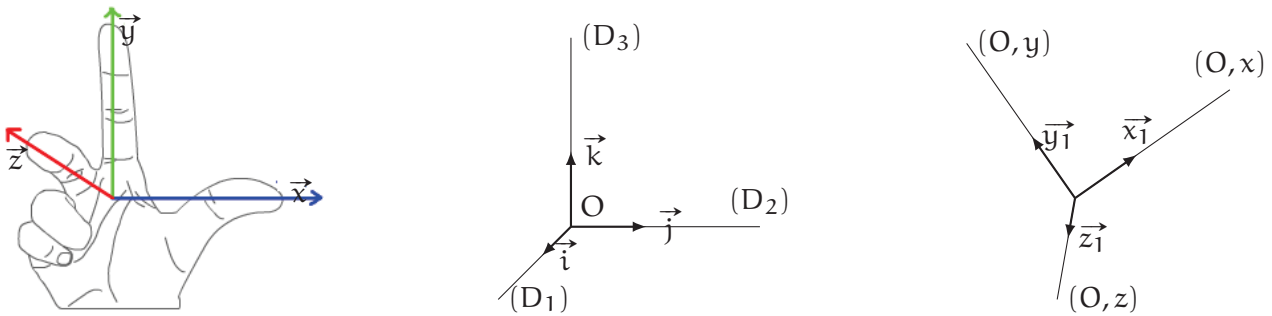


FIGURE 7.1 – Repères orthonormés

**Remarque :** L'usage en sciences industrielles est de noter la base de travail avec le nom des axes soit  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

### 7.1.2 Sens trigonométrique

Il est important pour l'étude et la description des mouvements de faire attention au sens direct.

Le sens direct dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  se confond avec le sens trigonométrique (figure 7.2a). La figure 7.2 précise l'orientation directe dans les autres plans.

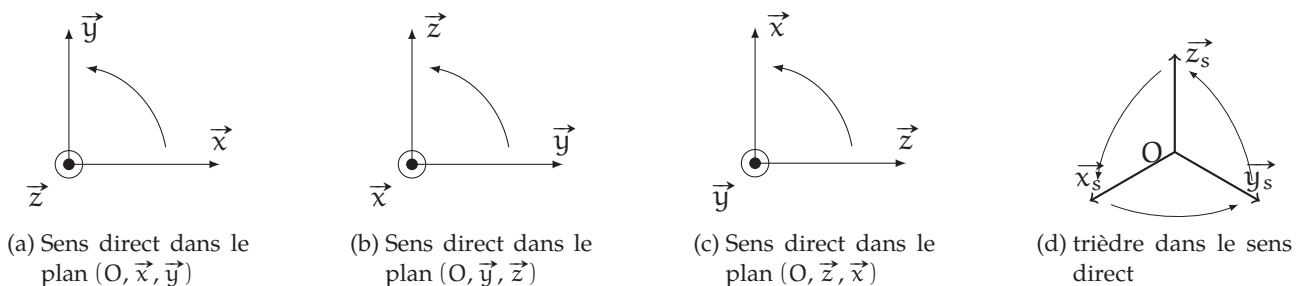


FIGURE 7.2 – Sens direct

### 7.1.3 Coordonnées cartésiennes

La manière la plus naturelle pour décrire la position d'un point est d'utiliser les coordonnées cartésiennes (figure 7.3), pour cela, on définit un repère orthonormé direct dit repère cartésien constitué de 3 vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et d'un point pour origine.

Il est nécessaire de préciser 3 dimensions pour décrire de manière unique la position d'un point. Sur l'exemple de la figure 7.3 le vecteur  $\vec{OH}$  s'écrit :

$$\vec{OH} = X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z}$$

On note  $(X, Y, Z)$  les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{OH}$  dans la base  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$X, Y$  et  $Z$  sont les trois projections orthogonales sur les axes  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  de  $\vec{OH}$ .

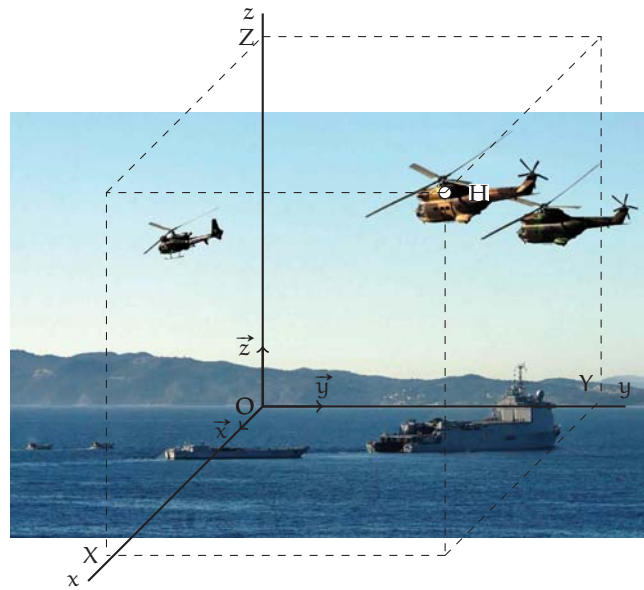


FIGURE 7.3 – Coordonnées cartésiennes

### 7.1.4 Coordonnées cylindriques

Le système de coordonnées cylindrique (figure 7.4) est une extension du système de coordonnées polaires utilisé dans le plan, en ajoutant à l'angle polaire orienté et au rayon polaire une troisième dimension perpendiculaire au plan.

Sur la figure 7.4, le vecteur  $\vec{OH}$  est défini par :

$$\vec{OH} = R \cdot \vec{n} + Z \cdot \vec{z}$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est précisé par l'angle  $\theta$  tel que  $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$  et la figure de calcul (figure 7.5).

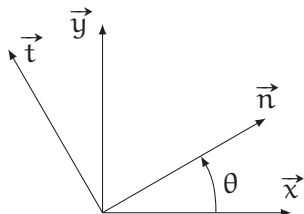


FIGURE 7.5 – Figure de calcul

Le vecteur  $\vec{OH}$  est décrit de manière unique par les trois dimensions :  $R, \theta$  et  $Z$ .

**Remarque :** En physique, vous utilisez plutôt la notation  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  pour décrire la base cylindrique.

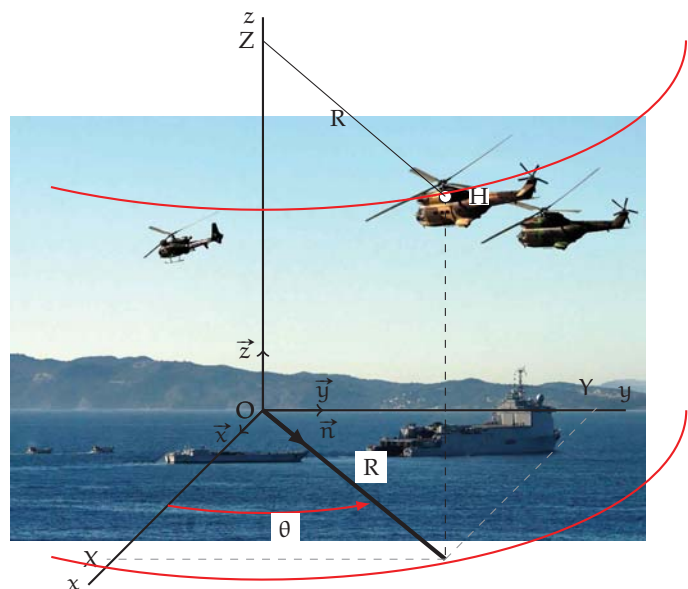


FIGURE 7.4 – Coordonnées cylindriques

### 7.1.5 Coordonnées sphériques

Un point en coordonnées sphériques est défini par une distance et deux angles. Le vecteur  $\vec{OH}$  s'écrit

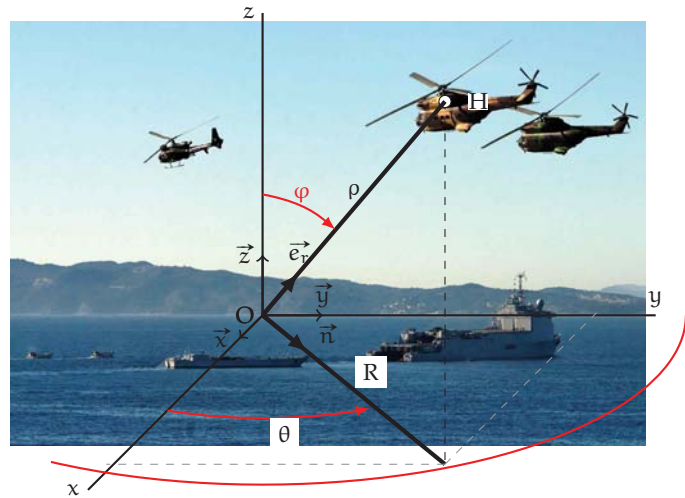
$$\vec{OH} = \rho \cdot \vec{e}_r$$

avec  $\rho$  la distance entre l'origine du repère et le point H et  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire porté par la droite (OH).

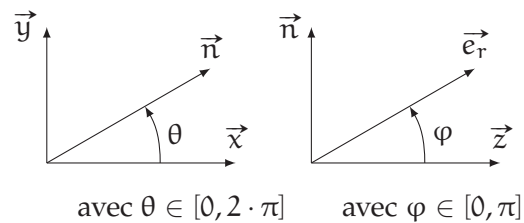
Le vecteur  $\vec{n}$  est porté par la projection de la droite (OH) dans le plan (O, x, y).

Le vecteur  $\vec{OH}$  est décrit de manière unique par les trois dimensions  $\rho$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ .

Le vecteur  $\vec{e}_r$  est défini par les deux figures de calculs de la figure 7.6b.



(a) Coordonnées sphériques



avec  $\theta \in [0, 2 \cdot \pi]$  avec  $\varphi \in [0, \pi]$

(b) figures de calculs

**Remarque :** Vous trouverez parfois des définitions opposées pour  $\varphi$  et  $\theta$ , la définition ci-dessus permet de conserver la même définition pour  $\theta$  en coordonnées cylindriques et sphériques.

FIGURE 7.6 – Coordonnées sphériques

### 7.1.6 Relations entre les systèmes de coordonnées

#### Coordonnées

**Cartésiennes :**  $\vec{OH} = X \cdot \vec{x} + Y \cdot \vec{y} + Z \cdot \vec{z}$ .

**Cylindriques :**  $\vec{OH} = R \cdot \vec{n} + Z \cdot \vec{z}$  et  $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$ .

**Sphériques :**  $\vec{OH} = \rho \cdot \vec{e}_r$  avec  $\varphi = (\vec{z}, \vec{e}_r)$  et  $\theta = (\vec{x}, \vec{n})$

#### Relations

**Cartésiennes ↔ Cylindriques :**

$$\begin{cases} X = R \cdot \cos \theta \\ Y = R \cdot \sin \theta \\ Z = Z \end{cases} \quad \begin{cases} R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \theta = \arctan \frac{Y}{X} \\ Z = Z \end{cases}$$

**Cartésiennes ↔ Sphériques :**

$$\begin{cases} X = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ Y = \rho \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ Z = \rho \cdot \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \theta = \arctan \frac{Y}{X} \\ \varphi = \arctan \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{Z} \end{cases}$$

**Cylindriques ↔ Sphériques :**

$$\begin{cases} R = \rho \cdot \sin \varphi \\ Z = \rho \cdot \cos \varphi \\ \theta = \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{R^2 + Z^2} \\ \varphi = \arctan \frac{R}{Z} \end{cases}$$

## 7.2 Position et orientation d'un solide

Si pour décrire la position d'un point, trois dimensions sont nécessaires et suffisantes, ce n'est plus suffisant pour décrire la position d'un solide et son orientation :

- En ne précisant qu'un point, le solide peut pivoter librement autour de ce point.
- En précisant deux points, le solide a une direction imposée, mais il peut tourner librement autour de l'axe formé par les deux points.
- En précisant, trois points non colinéaires, la position du solide est complètement définie.

Soit trois points A, B et C non colinéaires d'un solide, on peut écrire les relations suivantes pour préciser la position du solide :

$$\overrightarrow{O_0A} = X_A \cdot \vec{x}_0 + Y_A \cdot \vec{y}_0 + Z_A \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{O_0B} = X_B \cdot \vec{x}_0 + Y_B \cdot \vec{y}_0 + Z_B \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{O_0C} = X_C \cdot \vec{x}_0 + Y_C \cdot \vec{y}_0 + Z_C \cdot \vec{z}_0$$

soit 9 inconnues dimensionnelles, à ces trois relations vectorielles se rajoutent la distance (connue) entre chaque point :

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(X_C - X_A)^2 + (Y_C - Y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(X_C - X_B)^2 + (Y_C - Y_B)^2 + (Z_C - Z_B)^2}$$

On montre donc, à partir de ces 6 équations, qu'il est nécessaire de préciser 6 dimensions pour positionner complètement le solide (système de 6 équations avec 9 inconnues de rang 6).

Le positionnement d'un solide avec trois points n'étant pas très pratique, on préfère lui associer un repère et positionner ce repère dans l'espace avec 3 dimensions et trois angles (figure 7.7).

Le repère associé au solide s'appuie en général sur des particularités physiques de celui-ci (symétrie, axe de révolution, origine au centre de gravité,...).

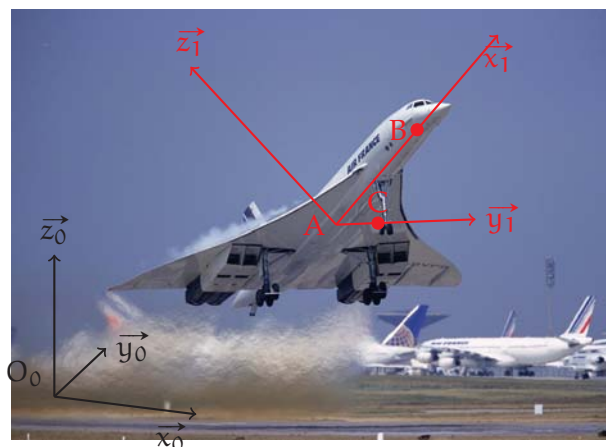


FIGURE 7.7 – Position d'un solide dans l'espace et repère associé

La figure 7.8 montre l'orientation d'un solide dans l'espace à l'aide de 3 angles. Le repère associé à l'avion est lié à celui-ci en positionnant l'origine de ce repère par rapport au repère lié au sol et en l'orientant avec 3 angles, on définit de manière unique la position et l'orientation de l'avion dans l'espace.

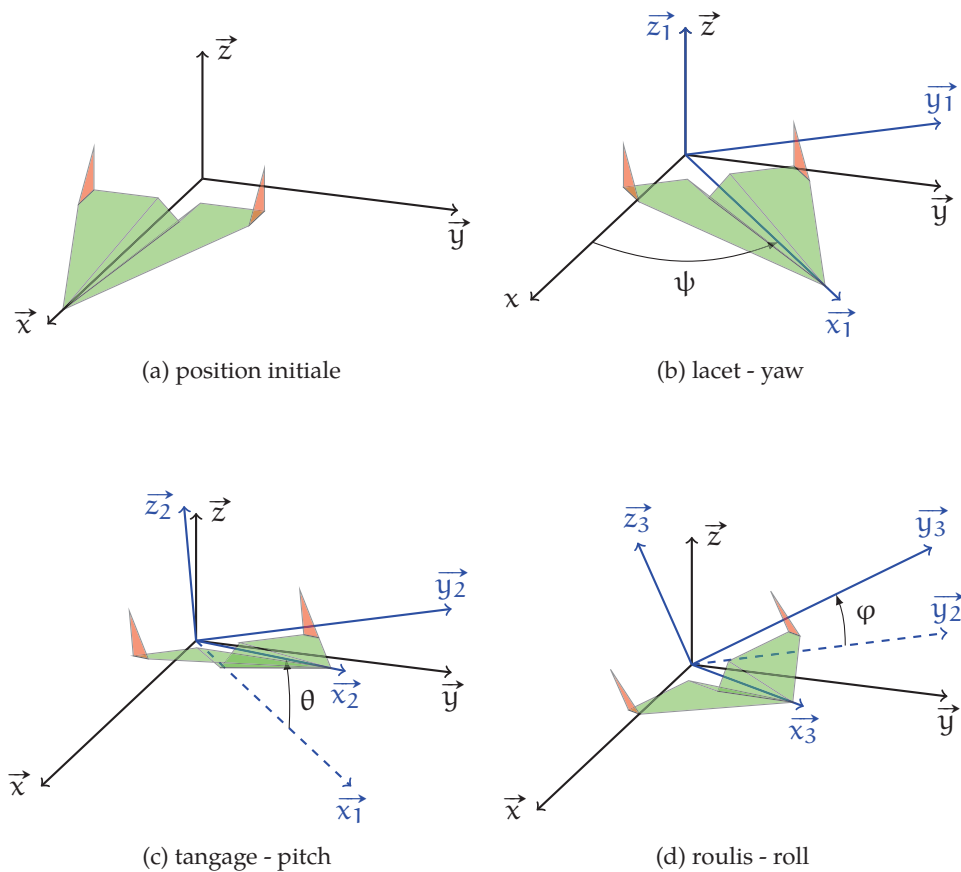


FIGURE 7.8 – Orientation d'un solide dans l'espace

## 7.3 Solides et repères associés

On le voit dans l'exemple ci-dessus, le positionnement d'un solide dans l'espace nécessite de préciser les angles qui positionnent les solides les uns par rapport aux autres.

### 7.3.1 Solides

Dans le cadre de la mécanique classique, nous supposons que les solides sont indéformables. C'est-à-dire que :

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = d$$

avec  $S$  un solide,  $A$  et  $B$  deux points du solide  $S$  et  $d$  une constante.

Ce modèle sera précisé plus loin dans ce cours.

### 7.3.2 Repères associés

À chaque solide, on convient d'associer un repère représentant le solide. Les différents repères sont ensuite positionnés les uns par rapport aux autres.

## Exemple guidé : Repères Robot

On retrouve sur la figure 7.9 un robot. pour chaque solide on a associé un repère :

- L'origine de chaque repère est placé sur un point caractéristique du solide (l'axe de rotation entre le socle et l'épaule, l'axe de rotation entre l'épaule et le bras,...).
- Les axes du repère sont orientés en fonctions des caractéristiques du solide.

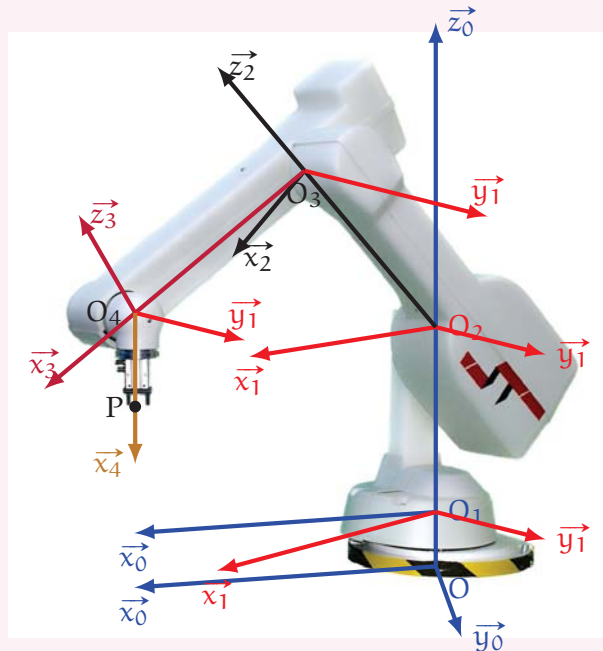


FIGURE 7.9 – Repères associés à un robot 5 axes

Le passage d'un repère à un autre est représenté graphiquement par des figures nommées figures planes de changement de base ou figures de calcul.

Sur ces figures, on représente la rotation plane qui permet de passer d'une base à une autre, ainsi sur la figure 7.10 on précise le passage de la base liée au socle à celle liée à la chaise par une rotation d'angle  $\theta_1$  autour de l'axe  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ .

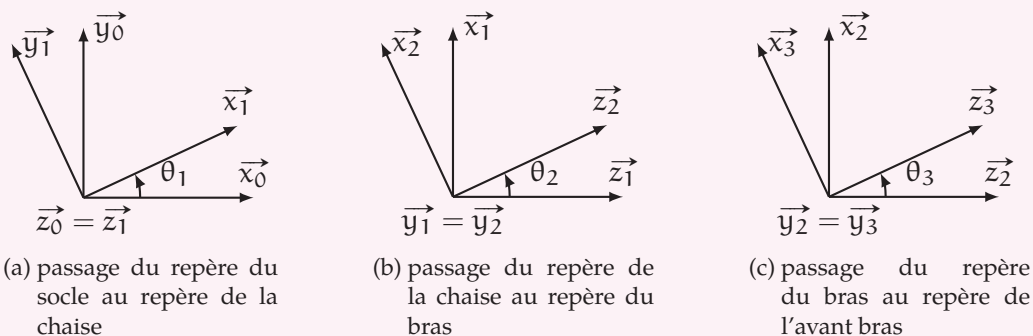


FIGURE 7.10 – Figures planes de changement de base du robot (incomplet)

**Remarque :** les figures planes sont très utiles pour déterminer les projections d'un vecteur d'une base dans une autre mais pour éviter les erreurs de signe, il est important de toujours représenter des angles compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  et de toujours utiliser des bases orthonormées directes.

## 7.4 Trajectoire et vitesse d'un point matériel

### 7.4.1 Point mobile par rapport à un référentiel

On appelle point matériel ou corps ponctuel tout corps ou toute partie de corps très petit à l'échelle d'observation. Par extension, c'est également un corps dont on ne peut définir le mouvement de rotation sur lui-même.

### 7.4.2 Trajectoire

On appelle trajectoire de M par rapport  $R_0$  l'ensemble des positions successives de M par rapport à  $R_0$  quand la date  $t$  varie. La trajectoire est une courbe liée à  $R_0$ .

Pour déterminer l'équation paramétrique de la trajectoire d'un point, on écrira les projections dans le référentiel d'étude de  $\vec{OM}$ .

La trajectoire dépend du repère  $R_0$  dans lequel elle est décrite. On utilise généralement une représentation paramétrique en fonction temps  $t$  pour décrire la trajectoire. La courbe  $C_{M/R_0}$  qui décrit la trajectoire dans un repère cartésien est donc de la forme :

$$C_{M/R_0} = \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}$$

avec  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  et  $f_3(t)$  trois fonctions de la variable  $t$ . Pour la suite ces trois fonctions seront nommées  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .

#### Exemple guidé : Trajectoire de la valve d'une roue de vélo

On se propose de déterminer la trajectoire de la valve d'une roue de vélo.



FIGURE 7.11 – Trajectoire de la valve

Le repère  $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au sol.

Le repère  $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  est lié à la roue avec  $O_1$  confondu avec l'axe de rotation de la roue par rapport au cadre. On suppose que la roue reste dans le plan vertical donc  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ .

On note  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  l'angle orienté de  $\vec{x}_0$  vers  $\vec{x}_1$ .

Cet angle est proportionnel à la vitesse angulaire de la roue  $\theta = \omega \cdot t$ .

Le point V associé à la valve est défini par :

$$\vec{O_1V} = R_v \cdot \vec{x}_1.$$

Le vélo se déplace à la vitesse  $v(t)$  suivant  $\vec{x}_0$ , la roue ne patine pas, elle roule sans glisser, on a donc  $v = -R \cdot \omega$ . Pour la suite nous supposons que la vitesse est constante :  $v(t) = v$ .

La position du centre de la roue ( $O_1$ ) par rapport au sol est donc définie par :

$$\vec{O_0O_1} = v \cdot t \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0.$$

La position de la valve (V) par rapport au sol est définie par :

$$\overrightarrow{O_0V} = v \cdot t \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0 + R_v \cdot \vec{x}_1.$$

La trajectoire de la valve par rapport au sol est l'ensemble des positions successives du point V dans le repère  $R_0$ . soit :

$$\overrightarrow{O_0V} = v \cdot t \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0 + R_v \cdot (\cos \theta \cdot \vec{x}_0 + \sin \theta \cdot \vec{y}_0)$$

$$\overrightarrow{O_0V} = (v \cdot t + R_v \cdot \cos \theta) \cdot \vec{x}_0 + (R + R_v \cdot \sin \theta) \cdot \vec{y}_0$$

$$\overrightarrow{O_0V} = (-R \cdot \omega \cdot t + R_v \cdot \cos(\omega \cdot t)) \cdot \vec{x}_0 + (R + R_v \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \vec{y}_0$$

finalement on obtient l'équation paramétrique de la trajectoire dans le repère  $R_0$  :

$$\begin{cases} x(t) = -R \cdot \omega \cdot t + R_v \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ y(t) = R + R_v \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Dans le repère  $R_1$  la trajectoire de la valve est un cercle.

### 7.4.3 Vitesse et accélération d'un point

#### a) Vitesse d'un point

On note  $\overrightarrow{V_{M/R_0}}$  le vecteur vitesse de M par rapport à  $R_0$ . Par définition :

$$\overrightarrow{V_{M/R_0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_0M} \right]_{B_0}$$

Avec  $O_0$  origine du repère  $R_0$  et  $B_0$  base de  $R_0$  On appelle  $B_0$  la base de dérivation, il ne faut pas confondre cette base avec la base de projection.

Le vecteur vitesse d'un point M dans une base donnée correspond à la dérivée de ce vecteur dans cette base.

Le vecteur vitesse est tangent en M à la trajectoire.

#### b) Accélération d'un point

On note  $\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}}$  le vecteur accélération de M par rapport à  $R_0$ . Par définition :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M/R_0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{M/R_0}} \right]_{B_0} = \left[ \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{O_0M} \right]_{B_0}$$

Le vecteur accélération du point M dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , correspond à la dérivée du vecteur vitesse de ce point dans cette base.

**Remarque importante :** ces grandeurs dépendent du repère (de la base) par rapport auquel on étudie le mouvement. Il est possible de décrire le mouvement par rapport à n'importe quel repère.

Pour aller plus loin, il faut définir la dérivation vectorielle. Nous verrons dans le chapitre suivant comment calculer ces dérivées vectorielles.

### 7.4.4 Vecteur vitesse de rotation

De la même manière que l'on définit le vecteur vitesse d'un point, on définit le vecteur vitesse de rotation d'un repère par rapport à un autre.

On note  $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}$  le vecteur vitesse de rotation du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ .

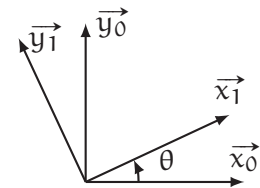


### a ) Cas d'une rotation plane

Soit le repère  $R_1$  en mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_0, \vec{z})$  par rapport au repère  $R_0$ , avec  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .

Le vecteur rotation est porté par le vecteur perpendiculaire au plan de la rotation (ici  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ ) et sa mesure algébrique est la dérivée du paramètre angulaire de mouvement entre les deux repères.

$$\overrightarrow{\Omega_{B_1/B_0}} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{z}_0 = \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0$$



### b ) Cas général

Le mouvement de rotation du repère  $R_i$  par rapport au repère  $R_0$  est constitué de plusieurs rotations élémentaires d'angle  $\theta_i$  autour de l'axe  $(O_i, \vec{e}_i)$ . Alors :

$$\overrightarrow{\Omega_{B_i/B_0}} = \sum_0^n \frac{d\theta_i}{dt} \cdot \vec{e}_i = \sum_0^n \dot{\theta}_i \cdot \vec{e}_i$$

Le vecteur vitesse de rotation se construit comme la somme des vecteurs vitesse de rotations élémentaires.

## 7.5 Compléments mathématiques

Ce petit chapitre apporte quelques notions mathématiques nécessaires à l'étude des mouvements. Ces notions à peine détaillées ici (non démontrées) sont très importantes et doivent être sues.

### C M 1 : Produit scalaire

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

avec

—  $(\vec{u}, \vec{v})$  : l'angle orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont définis dans la même base B :

$$\vec{u} = x_u \cdot \vec{x} + y_u \cdot \vec{y} + z_u \cdot \vec{z}$$

$$\vec{v} = x_v \cdot \vec{x} + y_v \cdot \vec{y} + z_v \cdot \vec{z}$$

alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v$$

### C M 2 : Produit vectoriel

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

—  $(\vec{u}, \vec{v})$  : l'angle orienté de  $\vec{u}$  vers  $\vec{v}$

—  $\vec{w}$  : le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  forme un trièdre direct (figure 7.2d)

—  $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

Soit  $B = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  une base orthonormée directe alors :

$$\begin{array}{ll} \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} & \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z} \\ \vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} & \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x} \\ \vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} & \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y} \end{array}$$

Distributivité :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

Linéarité :

$$\lambda \cdot \vec{u} \wedge \mu \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \mu \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

**Attention :** Le produit vectoriel est anti-symétrique.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont définis dans la même base  $B$  :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x_u \cdot \vec{x} + y_u \cdot \vec{y} + z_u \cdot \vec{z} \\ \vec{v} &= x_v \cdot \vec{x} + y_v \cdot \vec{y} + z_v \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \begin{matrix} + (y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u) \cdot \vec{x} \\ + (z_u \cdot x_v - z_v \cdot x_u) \cdot \vec{y} \\ + (x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u) \cdot \vec{z} \end{matrix}$$

On utilisera la petite figure mnémotechnique ci-dessous pour mémoriser le produit vectoriel.

sens +                      sens -

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_u \cdot z_v - y_v \cdot z_u \\ z_u \cdot x_v - z_v \cdot x_u \\ x_u \cdot y_v - x_v \cdot y_u \end{pmatrix}$$

### C M 3 : Produit mixte

Le produit mixte est la quantité notée  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et définie par

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Le produit mixte se conserve par permutation circulaire

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{aligned}$$

### C M 4 : Double produit vectoriel

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

**C M 5 : Dérivation d'un vecteur de la base de dérivation**

Si  $\vec{u}_0 = a(t) \cdot \vec{x}_0 + b(t) \cdot \vec{y}_0 + c(t) \cdot \vec{z}_0$  est défini dans la base  $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  de dérivation avec  $a(t)$ ,  $b(t)$  et  $c(t)$  trois fonctions temporelles, alors

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u}_0 \right]_{B_0} = \frac{da(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{db(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dc(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0$$

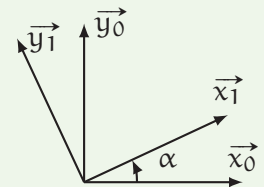
Si  $\vec{u}_0 = a_0 \cdot \vec{x}_0 + b_0 \cdot \vec{y}_0 + c_0 \cdot \vec{z}_0$  est un vecteur dont les coordonnées  $(a_0, b_0, c_0)$  dans la base  $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  sont constantes alors :

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u}_0 \right]_{B_0} = \vec{0}$$

**C M 6 : Dérivation d'un vecteur unitaire**

Soit  $\vec{x}_1 = \cos \alpha(t) \cdot \vec{x}_0 + \sin \alpha(t) \cdot \vec{y}_0$  un vecteur unitaire de la base  $B_1$ , et  $B_0$  la base de dérivation. La base  $B_1$  est en rotation plane d'angle  $\alpha$  par rapport à la base  $B_0$ , alors :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0} &= \frac{d \cos \alpha(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{d \sin \alpha(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0} &= -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \cdot \vec{x}_0 + \dot{\alpha}(t) \cdot \cos \alpha(t) \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$



On pose  $\overrightarrow{\Omega_{B_1/B_0}} = \dot{\alpha}(t) \cdot \vec{z}_0$  (avec  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ ) le vecteur rotation du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$  alors :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0} &= \overrightarrow{\Omega_{B_1/B_0}} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\alpha}(t) \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1 \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0} &= \dot{\alpha}(t) \cdot \vec{y}_1 = -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) \cdot \vec{x}_0 + \dot{\alpha}(t) \cdot \cos \alpha(t) \cdot \vec{y}_0 \end{aligned}$$

Cette relation est généralisable qu'elle que soit le mouvement de rotation entre les deux bases (plane ou spatiale). Il n'est pas conseillé de projeter le résultat mais de le laisser écrit sous sa forme la plus compacte.

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0} = \overrightarrow{\Omega_{B_1/B_0}} \wedge \vec{x}_1$$

**C M 7 : Dérivation d'un vecteur quelconque**

Il est toujours possible de projeter le vecteur quelconque dans la base de dérivation et utiliser les propriétés ci-dessus pour n'avoir à dériver que les coordonnées, mais souvent cela n'est pas recommandé.  $\vec{u}_i$  un vecteur défini dans la base  $B_i$ , et  $B_0$  la base de dérivation. Dans le cas général :

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u}_i \right]_{B_0} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u}_i \right]_{B_i} + \overrightarrow{\Omega_{B_i/B_0}} \wedge \vec{u}_i$$

avec  $\overrightarrow{\Omega_{R_i/R_0}}$  le vecteur rotation de la base  $B_i$  par rapport à la base  $B_0$  défini plus haut.

**C M 8 : Dérivation vectorielle d'une somme de vecteurs**

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions scalaires et  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs alors :

$$\left[ \frac{d}{dt} a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \right]_B = \frac{da}{dt} \cdot \vec{u} + a \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_B + \frac{db}{dt} \cdot \vec{v} + b \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_B$$

si  $a$  et  $b$  ne dépendent pas du temps, alors :

$$\left[ \frac{d}{dt} a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \right]_B = a \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_B + b \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_B$$

**C M 9 : Dérivation vectorielle d'un produit scalaire**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs alors :

$$\frac{d \vec{u} \cdot \vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_B \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_B$$

On remarque que le résultat ne dépend pas de la base de dérivation (mais ce doit être la même pour les deux vecteurs du produit scalaire).

**C M 10 : Dérivation vectorielle d'un produit vectoriel**

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs alors :

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \wedge \vec{v} \right]_B = \left[ \frac{d}{dt} \vec{u} \right]_B \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \vec{v} \right]_B$$

Après cet intermède mathématique, reprenons la détermination de la vitesse du point V de la valve par rapport au sol ( $R_0$ ).

**Exemple guidé : Vitesse et accélération de la valve d'une roue - Suite**

$$\overrightarrow{V_{V/R_0}} = \left[ \frac{d}{dt} v \cdot t \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_0 + R_v \cdot \vec{x}_1 \right]_{B_0}$$

$$\overrightarrow{V_{V/R_0}} = \left[ \frac{d}{dt} v \cdot t \cdot \vec{x}_0 \right]_{B_0} + \left[ \frac{d}{dt} R \cdot \vec{y}_0 \right]_{B_0} + \left[ \frac{d}{dt} R_v \cdot \vec{x}_1 \right]_{B_0}$$

$$\overrightarrow{V_{V/R_0}} = \frac{dv \cdot t}{dt} \cdot \vec{x}_0 + v \cdot t \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_0 \right]_{B_0} + \frac{dR}{dt} \cdot \vec{y}_0 + R \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_0 \right]_{B_0} + \frac{dR_v}{dt} \cdot \vec{x}_1 + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0}$$

$v$  et  $R$  et  $R_v$  sont constants :

$$\overrightarrow{V_{V/R_0}} = v \cdot \vec{x}_0 + v \cdot t \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_0 \right]_{B_0} + R \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_0 \right]_{B_0} + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0}$$

$\left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_0 \right]_{B_0} = 0$  et  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_0 \right]_{B_0} = 0$  car  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  sont deux vecteurs constants de la base  $B_0$ .

$$\overrightarrow{V_{V/R_0}} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_0}$$

pour continuer, on peut soit, projeter  $\vec{x}_1$  dans  $B_0$ , soit utiliser les propriétés de la dérivation d'un vecteur quelconque.

**Projection de  $\vec{x}_1$  :**

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \cos \theta \cdot \vec{x}_0 + \sin \theta \cdot \vec{y}_0 \right]_{B_0}$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{y}_0 \right]_{B_0}$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 - \omega \cdot R_v \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \vec{x}_0 + \omega \cdot R_v \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = (v - \omega \cdot R_v \cdot \sin(\omega \cdot t)) \cdot \vec{x}_0 + \omega \cdot R_v \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{y}_0$$

**Dérivation d'un vecteur quelconque :**

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}_1 \right]_{B_1} + R_v \cdot \vec{\Omega}_{B_1/B_0} \wedge \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + \vec{0} + R_v \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \wedge \vec{x}_1$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{V}_{V/R_0} = v \cdot \vec{x}_0 + R_v \cdot \omega \cdot \vec{y}_1$$

**Remarque importante :** La seconde méthode est toujours préférable à la première. La seconde méthode permet de remarquer que la vitesse comporte, une composante portée par  $\vec{x}_0$  et par une composante portée par  $\vec{y}_1$ , ces informations disparaissent lorsque l'on projette dans une base. On utilisera la première uniquement si on demande de présenter les résultats dans une base donnée.

Détermination de l'accélération de V par rapport à  $R_0$ .

$$\vec{\Gamma}_{V/R_0} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}_{V/R_0} \right]_{B_0}$$

$$\vec{\Gamma}_{V/R_0} = -R_v \cdot \omega^2 \cdot \vec{x}_1 \quad (\text{avec } v \text{ et } \omega \text{ constants})$$

## 7.6 Cinématique du solide

Comme pour la position d'un solide, il ne suffit pas de déterminer la vitesse d'un point d'un solide pour avoir le mouvement de celui-ci.

Le mouvement d'un solide peut se décomposer en 6 mouvements élémentaires :

- 3 translations le long des axes du repère d'étude ;
- 3 rotations autour de ces mêmes axes.

Nous allons établir l'outil mathématique qui permet de décrire ce mouvement en commençant par définir le modèle du solide.

### 7.6.1 Solide indéformable

#### a ) Solide réel – Choix d'un modèle

La notion usuelle de solide est en fait le plus souvent déterminée par opposition aux états liquide et gazeux. Si l'on essaie de préciser quelques caractéristiques d'un solide on s'aperçoit qu'il est difficile de déterminer un modèle simple représentant les solides.

- Dimensions : les dimensions d'un solide peuvent être considérées comme constantes sauf si les efforts appliqués sont trop importants (déformation voire destruction).

- Masse : constante à l'usure et à la corrosion près.
- L'évolution dans le temps n'est en général pas connue, déformation sous des efforts maintenus ou répétitif (fluage, fatigue du matériau,...)
- ...

La notion de solide regroupe en fait un ensemble de caractéristiques qui sont difficilement représentables par un unique modèle. Dans le cadre de la mécanique générale nous utiliserons le modèle du solide indéformable.

### b ) Modèle du solide indéformable

Un solide indéformable est un solide dont la masse est constante et indépendante du temps et dont les dimensions sont invariantes quelles que soient les actions extérieures. Il est constitué d'un ensemble de points matériels pour lesquels les distances mutuelles sont constantes et indépendantes du temps.

Si A et B sont deux points d'un solide S alors

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = d$$

Ce modèle permet d'étudier les mouvements du solide sous des efforts extérieurs, il ne permet pas d'étudier la déformation du solide, il ne permet pas de modéliser les solides « élastiques ».

**Remarque :** le choix d'un modèle est une étape importante dans la représentation de la réalité. Nous ne pouvons étudier et anticiper le comportement d'un système réel qu'à partir d'une modélisation de la réalité. Nous avons défini ici un modèle très limité d'un solide, nous définirons ultérieurement un modèle pour représenter les efforts. Tous ces modèles sont plus ou moins parfaits et il est nécessaire d'en connaître les limites pour valider les résultats de nos calculs.

### c ) Équivalence repère – Solide

À chaque solide on associe un repère lié. Les notations relatives aux solides seront équivalentes aux notations par rapport aux repères. Ainsi nous noterons aussi bien  $\overrightarrow{V_{M \in S_2/R_0}}$  pour parler de la vitesse du point M appartenant au solide 2 par rapport au repère  $R_0$  que  $\overrightarrow{V_{M \in R_2/R_0}}$ , voire pour simplifier la notation  $\overrightarrow{V_{M \in 2/0}}$ .

## 7.6.2 Champ des vecteurs vitesse d'un solide

Soit un solide  $S_1$ , le repère  $R_1$  est associé au solide  $S_1$ . Ce solide est en mouvement par rapport au repère  $R_0$ .

On considère le point A du solide  $S_1$ . On note  $\overrightarrow{V_{A \in S_1/R_0}}$  la vitesse du point A appartenant au solide  $S_1$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_0$ , de même  $\overrightarrow{V_{B \in S_1/R_0}}$  la vitesse du point B.

L'ensemble des vecteurs vitesse des points du solide  $S_1$  est appelé champ des vecteurs vitesse (figure 7.12). On se propose de déterminer une relation entre les vitesses de deux points d'un même solide. On note  $\overrightarrow{V_{A \in S_1/R_0}}$  et  $\overrightarrow{V_{B \in S_1/R_0}}$  la vitesse des deux points A et B du solide  $S_1$  par rapport au repère  $R_0$ .

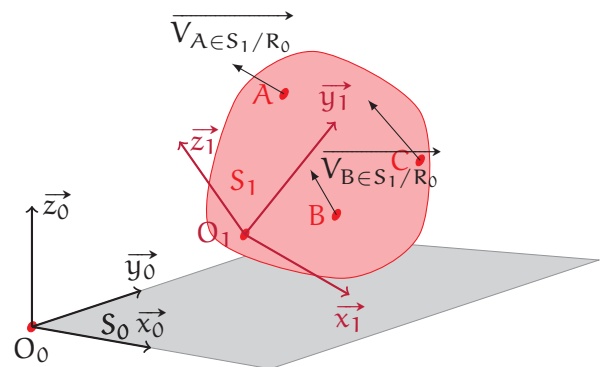


FIGURE 7.12 – Champ des vecteurs vitesse

On peut écrire une première égalité :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_0} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right]_{B_0} - \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_{B_0} \\ \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_0} &= \overrightarrow{V_{B \in S_1 / R_0}} - \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} \end{aligned}$$

puis une deuxième en déterminant cette dérivée à partir de la définition de la dérivée vectorielle d'un vecteur quelconque :

$$\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_0} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{B_1 / B_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec  $\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_1} = \vec{0}$  car  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur constant dans  $R_1$

$$\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_0} = \overrightarrow{\Omega_{B_1 / B_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

en égalant :

$$\overrightarrow{V_{B \in S_1 / R_0}} - \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{B_1 / B_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

La relation entre les vitesses de deux points d'un solide s'écrit finalement :

$$\overrightarrow{V_{B \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{B_1 / B_0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

On nomme cette relation : relation de changement de point ou relation de transport ou relation de Varignon.

Cette relation est **importante** et doit être suée. Elle est caractéristique du champ de vecteurs équiprojectifs. Elle va nous permettre, connaissant le vecteur vitesse de rotation et la vitesse d'un des points du solide par rapport à un repère, de déterminer la vitesse de tous les points du solide par rapport à ce repère.

### a ) Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

Soit A et B deux points d'un solide  $S_1$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= d \\ \overrightarrow{AB}^2 &= d^2 \end{aligned}$$

en dérivant cette relation

$$\frac{d \overrightarrow{AB}^2}{dt} = \frac{d \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}{dt} = 0 \quad (\text{car constant})$$

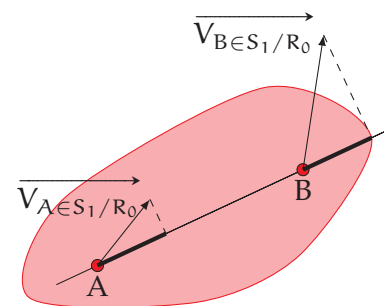


FIGURE 7.13 – Équiprojectivité

en dérivant le produit scalaire :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_{B_0} = 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \left( \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right]_{B_0} - \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OA} \right]_{B_0} \right) \\ 0 &= 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \left( \overrightarrow{V_{B \in S_1 / R_0}} - \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} \right) \end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{B \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}}$$

La vitesse d'un point A d'un solide  $S_1$  projetée sur la droite qui relie la droite (A, B) est égale à la vitesse du point B projetée sur cette même droite.

Cette relation est caractéristique de l'équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse.

### b ) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Soit I un point de  $S_1$  tel que  $\overrightarrow{V_{I \in S_1 / R_0}} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \neq \vec{0}$ .

$$\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{V_{I \in S_1 / R_0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA} = \vec{0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA}$$

$$\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA}$$

alors la vitesse est perpendiculaire au rayon IA et à la vitesse de rotation :  $\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} \perp \overrightarrow{IA}$  et  $\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} \perp \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ .

On pose :  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  la base « tournante »,  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \omega \cdot \vec{w}$  et  $\overrightarrow{IA} = R \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w}$  avec  $\vec{w} \perp \vec{u}$  alors

$$\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{IA}$$

$$\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = \omega \cdot \vec{w} \wedge (-R \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{w})$$

$$\overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} = R \cdot \omega \cdot \vec{v}$$

La vitesse du point A est proportionnelle à la distance entre A et l'axe instantané de rotation et elle est portée par la perpendiculaire à  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$  (figures 7.14 et 7.15).

- Si le point I n'est pas unique, alors, l'ensemble des points I tels que  $\overrightarrow{V_{I \in S_1 / R_0}} = \vec{0}$  forme l'**axe instantané de rotation**. Le mouvement est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe dans le repère d'étude.
- Si le point I est unique alors le mouvement est un mouvement de rotation autour d'un point (mouvement sphérique).

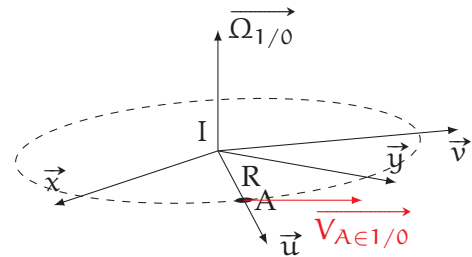


FIGURE 7.14 – Mouvement de rotation

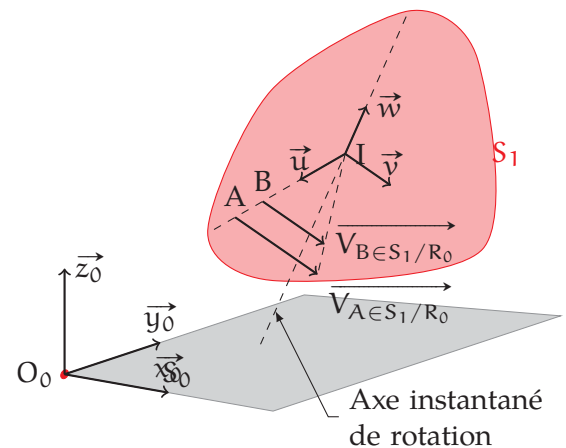


FIGURE 7.15 – Axe instantané de rotation

### c ) Mouvement plan : CIR

On dit qu'un mouvement est plan lorsque :

$$\forall A \in S_1, \overrightarrow{V_{A \in S_1 / R_0}} \perp \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

L'intersection de l'axe instantané de rotation avec le plan contenant les vitesses est appelé **centre instantané de rotation (CIR)**. On note  $I_{10}$  le CIR du mouvement du solide  $S_1$  par rapport au solide  $S_1$ .

$$\overrightarrow{V_{I_{10} \in S_1 / R_0}} = \vec{0}$$

Associé avec l'équiprojectivité, ces deux propriétés, permettent de déterminer graphiquement toutes les vitesses d'un solide dans un mouvement plan sur plan.

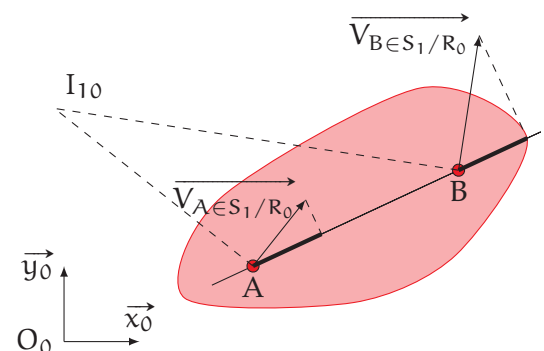


FIGURE 7.16 – CIR



**d ) Mouvement hélicoïdal**

On dit qu'un mouvement hélicoïdal lorsque la vitesse d'un point I est colinéaire à la vitesse de rotation :

$$\exists I \text{ tel que } \vec{V}_{I \in 1/0} = \lambda \cdot \vec{\Omega}_{1/0}$$

On pose  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{u}$ . Il existe alors une droite  $\Delta_u$  de vecteur unitaire  $\vec{u}$  tel que  $\forall P \in \Delta_u : \vec{V}_{P \in 1/0} = \lambda \cdot \vec{\Omega}_{1/0}$ .

**e ) Mouvement de translation**

Dans un mouvement de translation du solide  $S_1$  par rapport au solide  $R_0 : \vec{\Omega}_{B_1/B_0} = \vec{0}$

$$\forall A, B \in S_1, \vec{V}_{B \in S_1/R_0} = \vec{V}_{A \in S_1/R_0}$$

**7.6.3 Composition des vecteurs vitesse**

On se propose de déterminer la relation entre la vitesse du point P du solide  $S_2$  en mouvement par rapport au solide  $S_1$  lui-même en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . À chacun de ces solides on associe un repère (figure 7.17).

Déterminons :  $\vec{V}_{P \in 2/0}$ . Par définition :

$$\vec{V}_{P \in 2/0} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{O_0P} \right]_0 = \left[ \frac{d}{dt} \vec{O_0O_1} \right]_0 + \left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_0$$

**Premier terme :** on reconnaît la vitesse du point  $O_1$  de  $S_1$  par rapport à  $R_0$ .

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{O_0O_1} \right]_0 = \vec{V}_{O_1 \in 1/0}$$

**Second terme :** on ne peut pas calculer directement la dérivée  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_0$ , car ni le point  $O_1$  et P ne sont des points fixes de  $R_0$ , il faut donc utiliser la relation de dérivation vectorielle d'un vecteur quelconque en passant par le repère  $R_1$  :

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_0 = \left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{O_1P}$$

avec  $\vec{\Omega}_{1/0}$  le vecteur vitesse de rotation de  $S_1$  par rapport à  $S_0$  ( $R_1$  par rapport à  $R_0$ ). On reconnaît :  $\left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_1 = \vec{V}_{P \in 2/1}$ , la vitesse du point P de  $S_2$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\left[ \frac{d}{dt} \vec{O_1P} \right]_0 = \vec{V}_{P \in 2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{O_1P}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P \in 2/0} &= \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{V}_{P \in 2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{O_1P} \\ \vec{V}_{P \in 2/0} &= \vec{V}_{P \in 2/1} + \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{O_1P} \end{aligned}$$

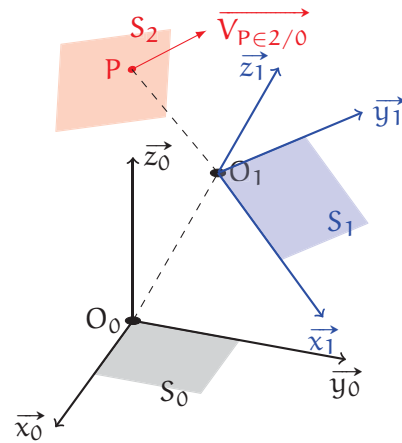


FIGURE 7.17 – Composition des vitesses

Si on considère le point P du solide  $S_1$  qui coïncide avec le point P de  $S_2$ , on reconnaît alors dans cette relation la vitesse de P de  $S_1$  dans son mouvement par rapport à  $S_0$

$$\overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} = \overrightarrow{V_{P \in 1/0}}$$

On obtient finalement la relation de composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V_{P \in 2/0}} = \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P \in 1/0}}$$

La vitesse d'un point P d'un solide  $S_2$  par rapport à un repère  $R_0$  est égale à la somme de la vitesse du point P appartenant à  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$  (repère  $R_1$ ) et de la vitesse du point P fixe dans le solide  $S_1$  par rapport au repère  $R_0$ .

On appelle :

- $\overrightarrow{V_{P \in 2/0}}$  : vitesse absolue, la vitesse du point P d'un solide  $S_2$  par rapport à un référentiel  $R_0$ .
- $\overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$  : vitesse relative, la vitesse du point P d'un solide  $S_2$  par rapport au un référentiel  $R_1$  mobile par rapport au référentiel  $R_0$ .
- $\overrightarrow{V_{P \in 1/0}}$  : vitesse d'entraînement, la vitesse du point P fixe dans le référentiel  $R_1$  par rapport au référentiel  $R_0$ .

Généralisation

Soit P un point du solide  $S_{i+1}$  mobile par rapport au solide  $S_i$  lui-même mobile par rapport au solide  $S_{i-1}$ , ..., lui-même mobile par rapport au solide  $S_1$ , lui-même mobile par rapport à  $S_0$ . Alors

$$\overrightarrow{V_{P \in (i+1)/0}} = \overrightarrow{V_{P \in (i+1)/i}} + \overrightarrow{V_{P \in i/(i-1)}} + \cdots + \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P \in 1/0}}$$

## 7.6.4 Composition des vecteurs accélération

On se propose de déterminer l'accélération du point P du solide  $S_2$  en mouvement par rapport au solide  $S_1$  lui-même en mouvement par rapport au solide  $S_0$ . Nous savons que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{P \in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P \in 1/0}} \\ \overrightarrow{V_{P \in 2/0}} &= \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \end{aligned}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps dans le repère  $R_0$ .

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/0}} \right]_0 &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right]_0 \\ \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \right]_0 + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{O_1 \in 1/0}} \right]_0 + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right]_0 \\ \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \right]_0 + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right]_0 \\ \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \right]_0 + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} \right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_0$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} \\ &\quad + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1 P} \right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right) \\ \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} \\ &\quad + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right) \\ \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} \\ &\quad + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right)\end{aligned}$$

finalement en réorganisant :

$$\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right) + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$$

On note :

- $\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/0}}$  : accélération absolue du point P appartenant à  $S_2$  par rapport à  $R_0$ .
- $\overrightarrow{\Gamma_{P \in 2/1}}$  : accélération relative du point P appartenant à  $S_2$  par rapport à  $S_1$ .
- $\overrightarrow{\Gamma_{P \in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{O_1 \in 1/0}} + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1 P} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{O_1 P} \right)$  : accélération d'entraînement du point M appartenant à  $S_1$  par rapport à  $R_0$ .
- $2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V_{P \in 2/1}}$  : accélération de Coriolis.

### a ) Relation entre les vecteurs accélération de deux points d'un solide

Soit A et B deux points du solide  $S_1$ .

Le champ des vecteurs vitesse permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

En dérivant cette relation par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{B \in 1/0}} \right]_0 &= \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \right]_0 + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \right]_0 \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 1/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_0 + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{\Gamma_{B \in 1/0}} &= \overrightarrow{\Gamma_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{AB} \right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \right) + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

d'où la relation de composition des accélérations

$$\overrightarrow{\Gamma_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{\Gamma_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left( \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \right) + \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \right]_0 \wedge \overrightarrow{AB}$$

**Remarque** : le champ des accélérations n'est pas un champ équiprojectif.

### 7.6.5 Composition des vecteurs vitesse de rotation

Soit deux référentiels  $R_1$  et  $R_2$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R_0$ .

Soit  $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{B_1/B_0}}$  les vecteurs rotation de  $R_2$  par rapport à  $R_1$  et de  $R_2$  par rapport à  $R_0$ .

On peut alors écrire la loi de composition des vecteurs rotation :

$$\overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{R_2/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{B_1/B_0}$$

### 7.6.6 Cinématique du contact ponctuel entre deux solides

Soit deux solides  $S_1$  et  $S_0$  en contact ponctuel au point  $I$  (figure 7.18). On note  $\vec{n}$ , la normale au plan tangent passant par  $I$ .  $\vec{t}$  et  $\vec{u}$  deux vecteurs unitaires du plan tangent en  $I$  tel que  $\vec{t} \wedge \vec{u} = \vec{n}$ .

Les mouvements possibles entre les deux solides sont :

- une translation dans le plan tangent, décomposable en deux translations élémentaires suivant  $\vec{t}$  et  $\vec{u}$ ;
- une rotation autour de l'axe  $(I, \vec{n})$  (on nomme cette rotation, le pivotement);
- une rotation dans le plan tangent (le roulement) décomposable en deux rotations élémentaires suivant les axes  $(I, \vec{t})$  et  $(I, \vec{u})$ .

Le mouvement entre les deux solides peut donc être décrit par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \overrightarrow{\Omega}_{p1/0} + \overrightarrow{\Omega}_{r1/0} \\ \overrightarrow{V}_{I \in 1/0} = \overrightarrow{V}_{t1/0} + \overrightarrow{V}_{u1/0} \\ \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \omega_p \cdot \vec{n} + \omega_t \cdot \vec{t} + \omega_u \cdot \vec{u} \\ \overrightarrow{V}_{I \in 1/0} = V_t \cdot \vec{t} + V_u \cdot \vec{u} \end{cases}$$

On appelle  $\overrightarrow{V}_{I \in 1/0}$  la vitesse de glissement de  $S_1$  par rapport à  $S_0$ .

#### a ) Roulement sans glissement

Si  $\overrightarrow{V}_{I \in 1/0} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{r1/0} \neq \vec{0}$ , on dit que le mouvement est un roulement sans glissement.

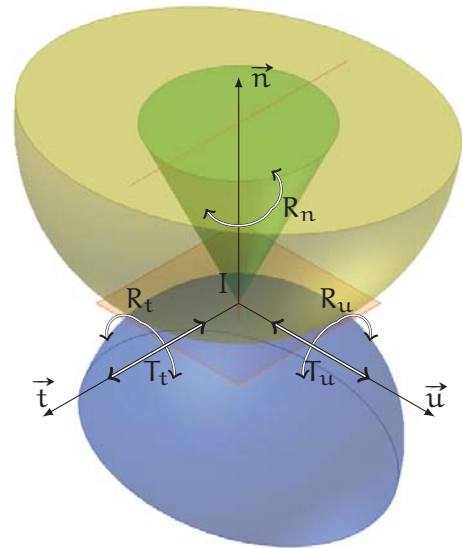


FIGURE 7.18 – Contact ponctuel

#### Exemple guidé : Roue de vélo : Roulement sans glissement

Soit la roue arrière d'un vélo modélisé sur la figure 7.19.

Le vélo se déplace en translation le long de l'axe  $(O_s, \vec{x}_s)$ , avec la vitesse  $\overrightarrow{V}_{O_v \in c/s} = v \cdot \vec{x}_s$ .

On note :

- Le repère  $(O_v, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$  est associé au vélo avec  $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s) = (\vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$  :

$$\left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{O_s O_v} \right]_s = v \cdot \vec{x}_s.$$

- $\alpha = (\vec{x}_s, \vec{x}_c) = (\vec{y}_s, \vec{y}_r)$  le paramètre de rotation de la roue par rapport au vélo.

- $\overrightarrow{\Omega}_{c/s} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_v$ , le vecteur vitesse de rotation.

On sait que  $\overrightarrow{V}_{O_v \in c/s} = v \cdot \vec{x}_s$

Déterminons :  $\overrightarrow{V}_{O_r \in r/s}$ .

La composition des vitesses permet d'écrire :

$$\overrightarrow{V}_{O_r \in r/s} = \overrightarrow{V}_{O_r \in r/v} + \overrightarrow{V}_{O_r \in v/s}$$

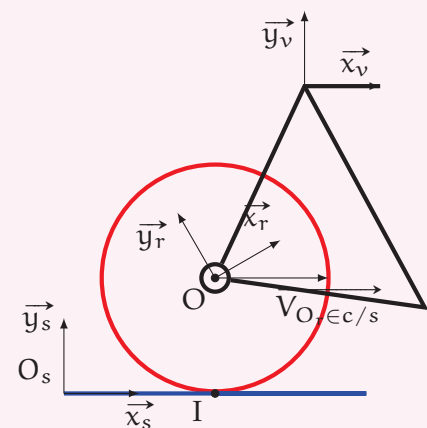


FIGURE 7.19 – Roulement sans glissement

Le vélo est en translation :  $\forall P \vec{V}_{P \in v/s} = v \cdot \vec{x}_s$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O \in r/s} &= \vec{V}_{O \in r/v} + v \cdot \vec{x}_s \\ \vec{V}_{O \in r/s} &= v \cdot \vec{x}_s \end{aligned}$$

Le point O est le centre de la rotation  $\vec{V}_{O \in r/v} = \vec{0}$ .

Déterminons  $\vec{V}_{I \in r/s}$  : le point I est le point de contact de la roue avec le sol à l'instant de l'étude :  $\vec{OI} = -R \cdot \vec{y}_v$ .

$$\vec{V}_{I \in r/s} = \vec{V}_{I \in r/v} + \vec{V}_{I \in v/s} = \vec{V}_{I \in r/v} + v \cdot \vec{x}_s$$

Déterminons  $\vec{V}_{I \in r/v}$  :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I \in r/v} &= \vec{\Omega}_{r/v} \wedge \vec{OI} = \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_v \wedge (-R \cdot \vec{y}_v) = R \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_s \\ \vec{V}_{I \in r/s} &= R \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_s + v \cdot \vec{x}_s \end{aligned}$$

Si la roue roule sans glisser sur le sol, alors la vitesse de glissement est nulle :  $\vec{V}_{I \in r/s} = \vec{0}$ .  
Ce qui permet d'écrire la relation entre la vitesse du vélo et la vitesse de rotation de la roue.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{I \in r/s} = \vec{0} &= R \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{x}_s + v \cdot \vec{x}_s \\ v &= -R \cdot \dot{\alpha} \end{aligned}$$

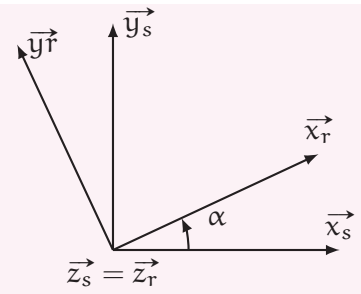


FIGURE 7.20 – figure de changement de base

Nous allons préciser cette relation de non glissement à partir de la figure 7.21, celle-ci représente un engin de chantier à chenilles.

Soit I un point d'un patin de la chenille en contact avec le sol. On comprend bien, si le tracto-pelle ne glisse pas que :

$$\vec{V}_{I \in \text{patin/sol}} = \vec{0}$$

On peut imaginer que si la longueur de contact entre la chenille et le sol tend vers 0, cela ne modifiera pas la vitesse du point I du patin par rapport au sol tant que celui-ci est sur le sol. On peut donc considérer que si la roue roule sans glisser, alors la vitesse de glissement est nulle.

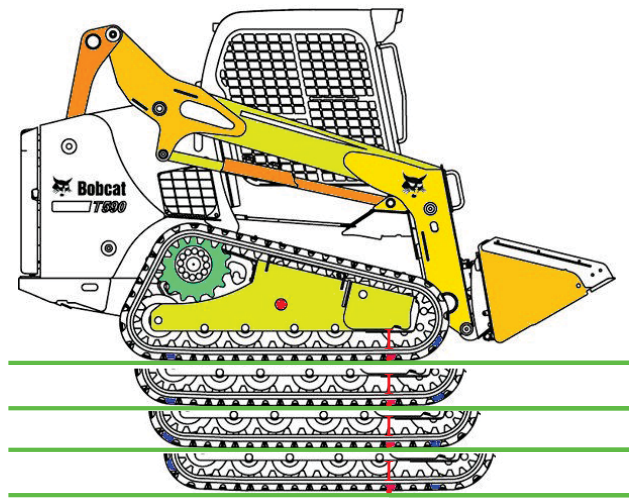


FIGURE 7.21 – Engin à chenilles

### 7.6.7 De la détermination de la vitesse d'un point

Nous venons de voir au dessus trois possibilités de calcul de la vitesse d'un point d'un solide.

**Dérivation du vecteur position :**  $\vec{V}_{B \in 2/0} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{OB} \right]_0$

**Champ des vecteurs vitesse :**  $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AB}$

**Composition des vecteurs vitesse :**  $\vec{V}_{B \in 2/0} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{V}_{B \in 1/0}$

Ces trois méthodes sont en général toujours utilisables mais il faut toujours s'assurer d'être dans le domaine d'emploi de la méthode.

**Dérivation du vecteur position :** cette méthode ne s'applique pas uniquement à un point d'un solide mais à tout point, il est donc nécessaire avant de l'appliquer pour un point d'un solide de s'as-

surer que celui-ci est intrinsèquement lié au solide. On évitera donc de l'utiliser pour un point géométrique de contact (vitesse de glissement) ou si B est un point du solide 2, on ne calculera pas  $\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \left[ \frac{d}{dt} \overrightarrow{OB} \right]_0$ .

**Champ des vecteurs vitesse** : une seule contrainte, l'appartenance du point au solide.

**Composition des vecteurs vitesse** : la détermination effective de la vitesse utilisera les deux méthodes ci-dessus, il faudra donc s'assurer que chaque méthode est appliquée correctement.

## 7.7 Le torseur cinématique

En préalable à la définition du torseur cinématique, nous allons dans un premier temps caractériser cette notion mathématique.

### 7.7.1 Compléments mathématiques : le torseur

#### C M 11 : Torseur

**Champ de vecteur** : Un champ de vecteur caractérise une propriété vectorielle dépendant du point d'observation : le champ électrique créé par une charge ponctuelle, le champ gravitationnel créé par la terre ou le soleil, le champ de pression de l'eau sur un barrage, le champ des vecteurs vitesse d'un solide dans son mouvement par rapport à un autre.

Soit  $\overrightarrow{M(P)}$ , la fonction vectorielle associée au point P de l'espace. Soit Q un point de l'espace, et  $\overrightarrow{M(Q)}$  la fonction associée. Le champ de vecteur est un champ de moment s'il existe un vecteur  $\vec{R}$  unique tel que pour tous les points P et Q.

$$\overrightarrow{M(Q)} = \overrightarrow{M(P)} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R}$$

**Équiprojectivité** : Un champ de moment est équiprojectif

$$\overrightarrow{M(Q)} \cdot \vec{R} = \overrightarrow{M(P)} \cdot \vec{R}$$

**Torseur** : On appelle torseur au point P,

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(P)} \end{array} \right\}_P$$

l'ensemble constitué des deux vecteurs :

- $\vec{R}$  : la résultante du torseur, c'est un invariant,
- $\overrightarrow{M(P)}$  : le moment du torseur au point P, il dépend du point.

Le torseur  $\{\mathcal{T}\}$  est défini en un point, ce même torseur exprimé au point Q s'écrit

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overrightarrow{M(Q)} = \overrightarrow{M(P)} + \overrightarrow{QP} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}_Q$$

Le champ des moments d'un torseur est un champ équiprojectif.

On peut aussi écrire ce torseur en précisant les coordonnées des deux vecteurs mais il est alors

nécessaire de préciser la base d'écriture.

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overline{M(P)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_{Px} \\ R_y & M_{Py} \\ R_z & M_{Pz} \end{array} \right\}_{P, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les coordonnées du torseur sont nommées les coordonnées plückeriennes.

**Remarque :** Ne jamais omettre de préciser le point et la base d'écriture du torseur.

**Égalité de deux torseurs :** Deux torseurs sont égaux s'ils ont même éléments de réduction en un point, réciproquement s'ils ont même éléments de réduction en un même point, ils sont égaux.

$$\{\mathcal{T}_1\} = \{\mathcal{T}_2\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(P)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overline{M_2(P)} \end{array} \right\}_P \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 = \vec{R}_2 \\ \overline{M_1(P)} = \overline{M_2(P)} \end{array} \right.$$

**Torseur nul :** Un torseur est nul, si ses éléments de réductions en un point sont nuls. Ces éléments de réduction sont alors nuls en tout point.

**Addition de deux torseurs :** Soit  $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overline{M_2(A)} \end{array} \right\}_A$  deux torseurs écrits au même point A alors la somme des torseurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}\} &= \{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\} \\ \{\mathcal{T}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overline{M_2(A)} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overline{M_1(A)} + \overline{M_2(A)} \end{array} \right\}_A \end{aligned}$$

Attention : la somme des composantes ne peut s'écrire qu'au même point et dans la même base.

**Multiplication par un scalaire :** Soit  $\{\mathcal{T}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overline{M(P)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} R_x & M_{Px} \\ R_y & M_{Py} \\ R_z & M_{Pz} \end{array} \right\}_{P, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$  un torseur et  $\lambda$  un

scalaire alors  $\lambda \cdot \{\mathcal{T}\} = \lambda \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \overline{M(P)} \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{cc} \lambda \cdot R_x & \lambda \cdot M_{Px} \\ \lambda \cdot R_y & \lambda \cdot M_{Py} \\ \lambda \cdot R_z & \lambda \cdot M_{Pz} \end{array} \right\}_{P, (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

**Comoment de deux torseurs :** Soit  $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A$  et  $\{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overline{M_2(A)} \end{array} \right\}_A$  deux torseurs écrits au même point A alors on note

$$C = \{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overline{M_2(A)} \end{array} \right\}_A = \vec{R}_1 \cdot \overline{M_2(A)} + \vec{R}_2 \cdot \overline{M_1(A)}$$

le comoment des deux torseurs. Le comoment est un scalaire, le résultat ne dépend pas du point de calcul, c'est un invariant.

**Automoment d'un torseur :** Soit  $\{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A$  alors

$$A = \{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(A)} \end{array} \right\}_A = 2 \cdot \vec{R}_1 \cdot \overline{M_1(A)}$$

**Torseur couple :** Un torseur est dit torseur couple si la résultante du torseur est nulle. Le

moment d'un torseur couple est le identique en tout point.

$$\{\mathcal{C}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overline{M_1(P)} \end{array} \right\}_{\forall P}$$

L'automoment d'un torseur couple est nul.

**Torseur glisseur :** Un torseur est un torseur glisseur si la résultante d'un torseur n'est pas nulle et que l'automoment est nul. Il existe alors un point A tel que :

$$\{\mathcal{G}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 \\ \overline{M_1(P)} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

**Axe central :** On appelle axe central du torseur la droite  $(A, \vec{u})$  telle que pour tout P appartenant à la droite  $(A, \vec{u})$  on a :

$$\overline{M_1(P)} = \lambda \cdot \vec{R}_1$$

**Réduction canonique d'un torseur :** On appelle réduction canonique d'un torseur, sa réduction en un point de l'axe central.

## 7.7.2 Torseur cinématique

Nous avons vu que les vitesses des points d'un solide se déduisent à partir de la relation suivante (dite formule de Varignon ou de changement de point) :

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

avec  $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$  le vecteur vitesse de rotation du solide 1 par rapport au référentiel 0.

De cette relation on déduit la propriété d'équiprojectivité obtenue en multipliant les deux membres de l'égalité par  $\overrightarrow{AB}$  :

$$\overrightarrow{V_{B \in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \cdot \overrightarrow{AB}$$

La relation de changement de point est la relation d'un champ des moments des **torseurs**.

On note

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overline{V_{A \in 1/0}} \end{array} \right\}_A$$

le torseur cinématique du solide 1 dans son mouvement par rapport au référentiel 0. On aussi écrire ce torseur en précisant les coordonnées des deux vecteurs mais il est alors nécessaire de préciser la base d'écriture.

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \quad V_x \\ \omega_y \quad V_y \\ \omega_z \quad V_z \end{array} \right\}_{\substack{A \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$$

Un torseur est toujours défini en un point particulier ainsi au point B on a :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{V_{B \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}_B$$

**Mouvement de rotation :** le torseur cinématique d'un solide en rotation par rapport à un référentiel



## 7.7 Le torseur cinématique

s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \forall A \in I_{1/0} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

S'il n'existe qu'un seul point  $A$ , alors la rotation se fait autour du point  $A$ , le mouvement est sphérique, s'il existe une infinité de point  $A$  alors le mouvement est une rotation autour de la droite formée par ces points. Ce torseur est un torseur glisseur

**Mouvement de translation** : le torseur cinématique d'un mouvement de translation s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \forall P \in I_{1/0} \end{array} \right\}_{\forall P \in I}$$

Ce torseur est un torseur couple.

**Mouvement hélicoïdal** : le torseur cinématique d'un mouvement hélicoïdal s'écrit :

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{10} \cdot \vec{u} \\ \forall P \in I_{1/0} = \lambda \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \end{array} \right\}_{\forall P \in (A, \vec{u})}$$

Si  $\lambda = 0$  alors le mouvement est un mouvement de rotation autour de l'axe  $(A, \vec{u})$ .

## 7.8 Feuille de travaux dirigés n°7

### Exercice 1 - Éolienne

Corrigé page 30

Soit l'éolienne de la figure 7.22.

La nacelle (1) pivote autour du mas (0) suivant l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .

L'hélice (2) pivote autour de l'axe  $(A, \vec{x}_1)$ . On note :

- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  le paramètre de rotation entre le repère associé à la nacelle et le mas,
- $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$  le paramètre de rotation entre l'hélice et la nacelle,
- $\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_1$ ,
- B le point à l'extrémité de la pale  $\vec{AB} = b \cdot \vec{z}_2$  avec  $b = 2,3 \text{ m}$ .

**Q1.** Tracer les deux figures de changement de base.

**Q2.** Déterminer la vitesse du point A et du point B par rapport au repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

**Q3.** Écrire les deux torseurs cinématique  $\{v_{1/0}\}$  et  $\{v_{2/1}\}$  en

A et en O puis  $\{v_{2/0}\}$  en A et en O.

**Q4.** Déterminer l'accélération de ces deux points par rapport au repère  $R_0$ .

L'éolienne est orientée dans le vent et ne bouge pas, la vitesse de rotation de l'hélice est réglée et maintenue constante.

**Q5.** Donner alors l'accélération de ces deux points.

**Q6.** La vitesse maximale admissible au bout de la pale est

$V_{\max} = 70 \text{ m s}^{-1}$ , en déduire  $\omega_{21} = \frac{d\beta(t)}{dt}$  pour  $\theta$  constant.

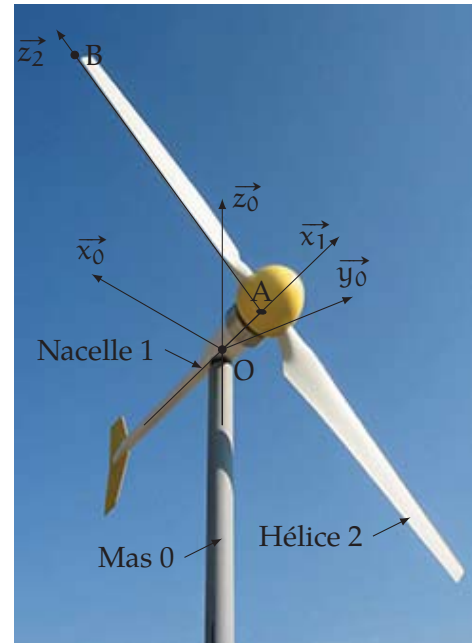


FIGURE 7.22 – Éolienne

## Exercice 2 - Robot Scara

Corrigé page 31

## Présentation

Le robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm) est l'un des robots les plus utilisés en industrie. Il est très souvent utilisé pour réaliser des assemblages (figure 7.23).

La structure de base des robots SCARA est à deux degrés de liberté, deux rotations d'axes parallèles, l'une entre le carter (0) et le bras (1) autour de  $(O, \vec{z}_0)$ , et une autre entre le bras et l'avant bras (2) autour de l'axe  $(A, \vec{z}_0)$ .

À ces deux rotations s'ajoutent une rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z}_0)$  et une translation de même direction permettant des opérations d'assemblage et de vissage de la pince (3).

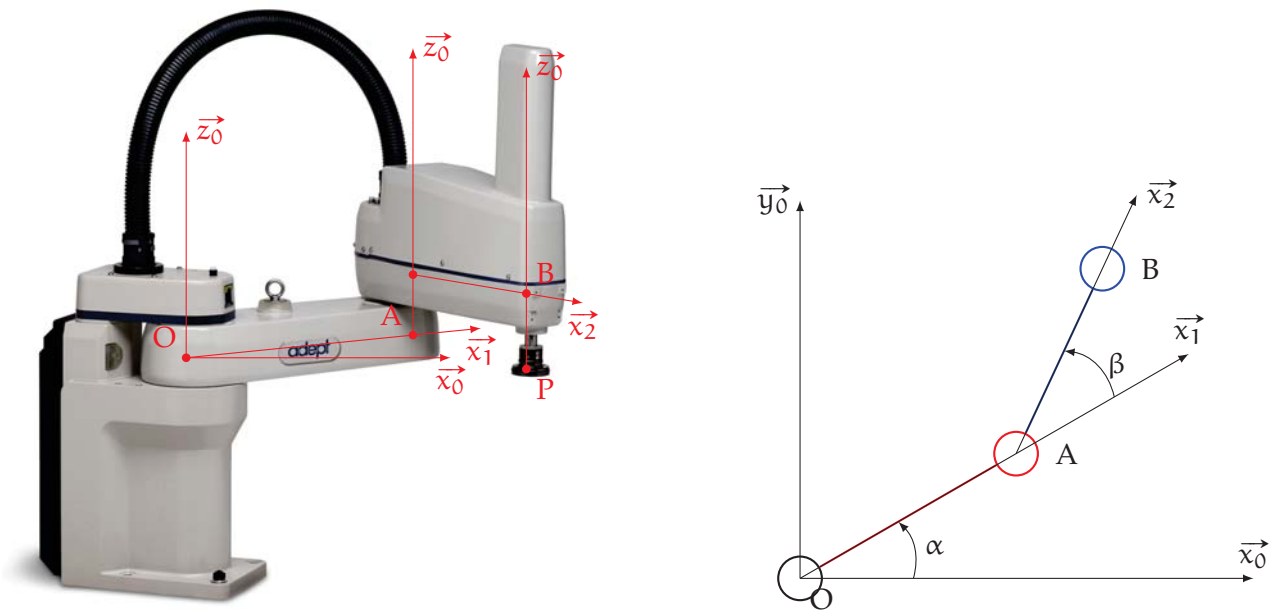


FIGURE 7.23 – Robot SCARA

Données :

- $\vec{OA} = a \cdot \vec{x}_1$  avec  $a = 50 \text{ cm}$ ;
- $\vec{AB} = b \cdot \vec{x}_2 + c \cdot \vec{z}_0$   
avec  $b = 30 \text{ cm}$  et  $c = 5 \text{ cm}$ ;
- $\vec{BP} = -\lambda \cdot \vec{z}_0$  avec  $5 \text{ cm} \leq \lambda \leq 30 \text{ cm}$ ;
- $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$   
avec  $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$
- $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$   
avec  $-135^\circ \leq \beta \leq 135^\circ$

Q1. Tracer les figures de changement de base.

Q2. Déterminer  $\vec{OP}$  en fonction de  $a, b, \alpha, \beta$  et  $\lambda$ .

Q3. Tracer le domaine du plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  dans lequel le robot peut saisir et manipuler des pièces. Différencier les zones pour lesquelles il n'existe qu'une combinaison de  $\alpha$  et  $\beta$  pour atteindre un point donné et les autres.

Q4. Déterminer  $\vec{V}_{A \in 1/0}, \vec{V}_{B \in 2/0}, \vec{V}_{P \in 3/0}$

Q5. Déterminer  $\vec{\Gamma}_{A \in 1/0}, \vec{\Gamma}_{B \in 2/0}, \vec{\Gamma}_{P \in 3/0}$