

# 6. Analyse des systèmes asservis

## 6.1. Caractérisation des systèmes asservis

### 6.1.1. Structure des systèmes asservis

Un système asservi linéaire peut se représenter par le schéma 6.1. On y retrouve, une chaîne d'action qui agit sur le système pour obtenir la sortie souhaitée en fonction de la consigne, une chaîne d'information qui prélève une image de la sortie, cette image est comparée à la consigne à atteindre.

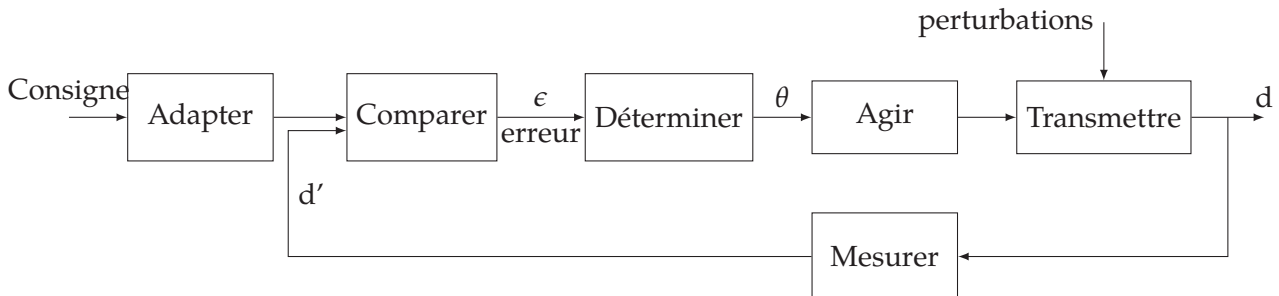


FIGURE 6.1. – Schéma fonctionnel d'un système asservi

#### a ). Caractéristiques attendues d'un système asservi

**Précision** La précision étant l'écart entre la consigne et la sortie du système, il semble évident que l'on souhaite que cet écart soit nul.

Dans le cas d'un asservissement de type régulation, on cherche à avoir une erreur indicielle nulle (pour une entrée de type échelon) et si le système doit suivre une consigne évolutive (suivi de trajectoire), une erreur de traînage nulle.

Il faut aussi vérifier que le système n'est pas sensible aux perturbations extérieures (l'ouverture de la porte d'un four doit être corrigée le plus rapidement possible).

**Stabilité** La stabilité est la qualité la plus importante que doit posséder le système asservi. On ne peut en général se satisfaire de l'information binaire de la stabilité ( stable / instable) , en effet, un système qui atteint sa position finale après de nombreuses oscillations est stable mais ne peut être considéré comme un système correct. La notion de dépassement, associée aux marges de stabilité, permet de caractériser cette stabilité relative.

**Rapidité** Comme pour la précision, on souhaite que le système soit le plus rapide possible. Souvent après avoir réglé la stabilité du système, avoir obtenu la précision souhaitée, il ne reste plus de possibilité de réglage de la rapidité sans modifier les paramètres précédents.

Le réglage et l'optimisation du comportement d'un système est souvent un compromis entre stabilité (oscillations) précision, et rapidité.

## 6.2. Stabilité

### 6.2.1. Position du problème et définitions

Une manière intuitive de préciser la notion de stabilité est d'imaginer un système que l'on écarte de sa position initiale par une impulsion puis de regarder son évolution, s'il retrouve sa position initiale, il est stable, s'il s'en écarte, il est instable.

Les petits schémas 6.2 précisent quelques comportements possibles d'un système.



FIGURE 6.2. – Représentation de la stabilité

Plusieurs définitions de la stabilité sont possibles.

**Énoncé (Définition 1)** *Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.*

**Remarque :** cela revient à solliciter le système avec une entrée bornée (type échelon) et à vérifier que la sortie ne diverge pas.

**Énoncé (Définition 2)** *Un système est stable si la réponse libre du système tend vers zéro à l'infini.*

**Remarque 1 :** étudier la réponse libre d'un système, revient à étudier le système lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre et à analyser sa réponse. Un système stable a tendance à revenir dans sa position d'équilibre, un système qui ne revient pas dans sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit juste instable.

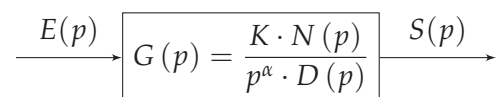
**Remarque 2 :** pour étudier la réponse libre, il suffit de solliciter le système par une impulsion de Dirac et de vérifier que celui-ci revient en position initiale.

Ces deux définitions sont équivalentes dans le cas de systèmes linéaires mais sont parfois mises en défaut.

Un système réel instable oscille ou s'écarte de sa position jusqu'à la destruction. Les oscillations sont dans le cas général limitées par les différentes saturations (limites des amplificateurs opérationnels, butées physiques,...). Ces limitations physiques peuvent laisser croire que la sortie du système est bornée.

#### a ). Étude générale de la stabilité

**Modèle d'étude** Tout système linéaire (sans retard) peut se mettre sous la forme du schéma bloc ci-contre.



- $K$  le gain  $K > 0$ ;
- $N(p)$  et  $D(p)$  deux polynômes tel que :
  - $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$ ;
  - $N(p)$  de degré  $m$ ,  $N(p) = 1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m$ ;
  - $D(p)$  de degré  $n$ ,  $D(p) = 1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n$ ;
- $\alpha$  la classe du système.

Pour un système physique, en vertu du principe de causalité (l'effet ne peut précéder la cause), le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur.

## 6.2.2. Étude de la stabilité

Afin d'étudier la stabilité du système, on se propose de déterminer l'allure de la réponse temporelle du système écarté de sa position initiale puis relâché.

Abandonner un système avec une condition initiale non nulle revient pour l'étude du comportement à considérer que le système a été soumis à l'instant  $t = 0$  à une impulsion  $e(t) = A_0 \cdot \delta(t)$  avec  $\delta(t)$  l'impulsion de Dirac, si celui-ci revient dans sa position initiale, on considère alors que le système est stable.

On rappelle que la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac est

$$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1 \quad \text{d'où} \quad \mathcal{L}(e(t)) = A_0$$

Nous avons  $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$  d'où  $S(p) = G(p) \cdot E(p)$  finalement  $S(p) = A_0 \cdot G(p)$ .

La réponse temporelle  $s(t)$  se déduit de la transformée inverse de  $S(p)$  :

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = A_0 \cdot \mathcal{L}^{-1}(G(p)).$$

Étudier la réponse temporelle d'un système linéaire soumis à une impulsions de Dirac revient donc à étudier la transformée inverse de la fonction de transfert du système :

$$\mathcal{L}^{-1}(G(p)) = g(t) \cdot \mathcal{H}(t)$$

avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside telle que  $\begin{cases} t < 0 & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geq 0 & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$ .

Il reste donc à déterminer la transformée inverse de  $G(p)$ , pour cela nous allons décomposer la fonction de transfert en éléments simples et rechercher les racines du dénominateur (les pôles).

$$G(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)} = \frac{K \cdot (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \dots + b_n \cdot p^n)}$$

Tout polynôme possède et / ou :

- des racines nulles;
- des racines réelles, simples et / ou multiples;
- des racines complexes, simple et / ou multiples.

Le polynôme du dénominateur peut donc se mettre sous la forme d'un produit de fonctions du premier et du second ordre :

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j} \cdot \prod_l \left( (p - a_l)^2 + b_l^2 \right)^{\alpha_l} \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}}$$

avec :

- $p^\alpha$  : racines nulles d'ordre  $\alpha$ ,
- $\prod_j (p - c_j)^{\alpha_j}$  : racines réelles multiples d'ordre  $\alpha_j$ ,
- $\prod_l \left( (p - a_l)^2 + b_l^2 \right)^{\alpha_l}$  : racines complexes multiples d'ordre  $\alpha_l$ ,
- $\prod_k (p^2 + b_k^2)^{\alpha_k}$  : racines imaginaires pures multiples d'ordre  $\alpha_k$ .

On suppose pour simplifier l'étude qui suit que toutes les racines sont simples, le cas des racines multiples sera examiné plus loin.

## 6. Analyse des systèmes asservis

Si les racines sont simples ( $\alpha = \alpha_j = \alpha_k = \alpha_l = 1$ ) alors

$$G(p) = K' \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_m \cdot p^m}{\prod_j (p - c_j) \cdot \prod_l \left( (p - a_l)^2 + b_l^2 \right) \cdot \prod_k (p^2 + b_k^2)}$$

et la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$G(p) = \sum_f \frac{C_f}{p} + \sum_j \frac{C_j}{p - c_j} + \sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} + \sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2}$$

on reconnaît :

- $\sum_f \frac{C_f}{p}$  : décomposition en fraction simple des racines nulles,
- $\sum_j \frac{C_j}{p - c_j}$  : décomposition en fraction simple des racines réelles,
- $\sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$  : décomposition en fraction simple des racines complexes conjuguées,
- $\sum_k \frac{A_k \cdot p + B_k}{p^2 + b_k^2}$  : décomposition en fraction simple des racines imaginaires pures.

La réponse temporelle est donc la somme des réponses temporelles. Le système sera instable si un des termes ne tend pas vers 0 en l'infini, il nous suffit donc d'étudier chacune des transformées inverses pour obtenir les conditions de stabilité du système.

Commençons par les racines réelles et complexes.

**Racines réelles simples**  $\sum_j \frac{C_j}{p - c_j}$  : à partir du tableau des transformées inverses en annexe (page ??)

on déduit

$$\frac{C_j}{p - c_j} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot e^{c_j \cdot t}.$$

Le système est stable si la réponse temporelle tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers l'infini. L'allure de la réponse temporelle ne dépend donc que du signe de  $c_j$ .

- $c_j > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable ;
- $c_j < 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{c_j \cdot t}) = +0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

**Racine complexes simples**  $\sum_l \frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$  : le tableau des transformées inverses ne donne pas di-

rectement la transformée de  $\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2}$  mais, il est possible de la déduire à partir des deux

formes suivantes :

- $\frac{b}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin b \cdot t$  et
- $\frac{p + a}{b^2 + (p + a)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos bt$ .

La transformée inverse est donc de la forme :

$$\frac{A_l \cdot p + B_l}{(p - a_l)^2 + b_l^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K_i \cdot e^{a_i \cdot t} \cdot \sin (b_i \cdot t + \varphi_i)$$

Le sinus est toujours borné, la stabilité du système ne dépend donc que du signe de  $a_i$  :

- $a_i > 0$ , comme précédemment  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i \cdot t}) = +\infty$ , la sortie diverge, le système est instable

## 6. Analyse des systèmes asservis

—  $a_i < 0$ , dans ce cas,  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{a_i t}) = 0$ , la sortie tend vers 0, cette racine ne rend pas le système instable.

**Racines réelles multiples**  $\sum_j \frac{C_j}{(p - c_j)^n}$  : à partir du tableau des transformées inverses en annexe (page ??) on déduit

$$\frac{C_j}{(p - c_j)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C_j \cdot t^{n-1} \cdot e^{c_j t}.$$

Il ne reste plus qu'à étudier le cas d'une racine nulle, et le cas d'une racine imaginaire pure mais nous allons ici prendre en compte le fait que la racine soit simple ou multiple.

**Racine nulle simple**  $\frac{1}{p}$ , 0 est racine du dénominateur. La transformée inverse est :

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 \cdot \mathcal{H}(t).$$

La sortie tend donc vers une constante non nulle. Le système ne revient pas à 0 mais ne s'écarte pas indéfiniment, il reste borné. On dit alors que le système est *juste instable*.

**Remarque** : Si on prend la première définition, c'est à dire que l'on soumet le système à une entrée en échelon, la sortie diverge (la sortie tend vers une droite – intégration d'une constante–).

**Racine nulle double**  $\frac{1}{p^2}$ , du tableau des transformées, on déduit

$$\frac{1}{p^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t.$$

On constate que la sortie diverge lorsque  $t$  croît. Le système est donc instable.

**Racine imaginaire simple**  $\frac{A_k}{p^2 + \omega_k^2}$ , on a alors  $p_k = \pm j \cdot \omega_k$  qui est racine du dénominateur.

Du tableau des transformées on déduit :

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\omega} \sin \omega \cdot t.$$

La sortie est constamment sinusoïdale, elle ne tend pas vers 0 mais elle reste bornée. On dit alors que le système est *juste instable*.

**Racine imaginaire double**  $\frac{A_k}{(p^2 + \omega_k^2)^2}$  le tableau donne

$$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2 \cdot \omega^2} (\sin \omega \cdot t - \omega \cdot t \cdot \cos \omega \cdot t).$$

Le second terme tend vers l'infini, le système est donc instable.

### a ). Conclusion

- Si les parties réelles des racines complexes sont toutes négatives et si toutes les racines réelles sont négatives, alors la réponse transitoire du système est composée d'exponentielles amorties et décroissantes, la réponse tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini, le système revient à sa position d'équilibre, le système est stable ;
- Si un des pôles réels est positif, le système est instable. Le système est de type divergent exponentiel ;

- Si un des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est instable. Le système est de type oscillatoire divergent;
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine simple, le système est juste instable;
- Si 0 ou  $\pm j\omega$  est racine multiple, le système est instable.

### 6.2.3. Condition de stabilité

**Énoncé (condition de stabilité)** *Un système est stable si, et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.*

**Remarque :** on appelle *pôles* de la fonction de transfert les racines du dénominateur.

### 6.2.4. Position des pôles

La position des pôles dans le plan complexe de la fonction de transfert en boucle fermée nous renseigne sur la stabilité de la fonction de transfert (fig 6.3).

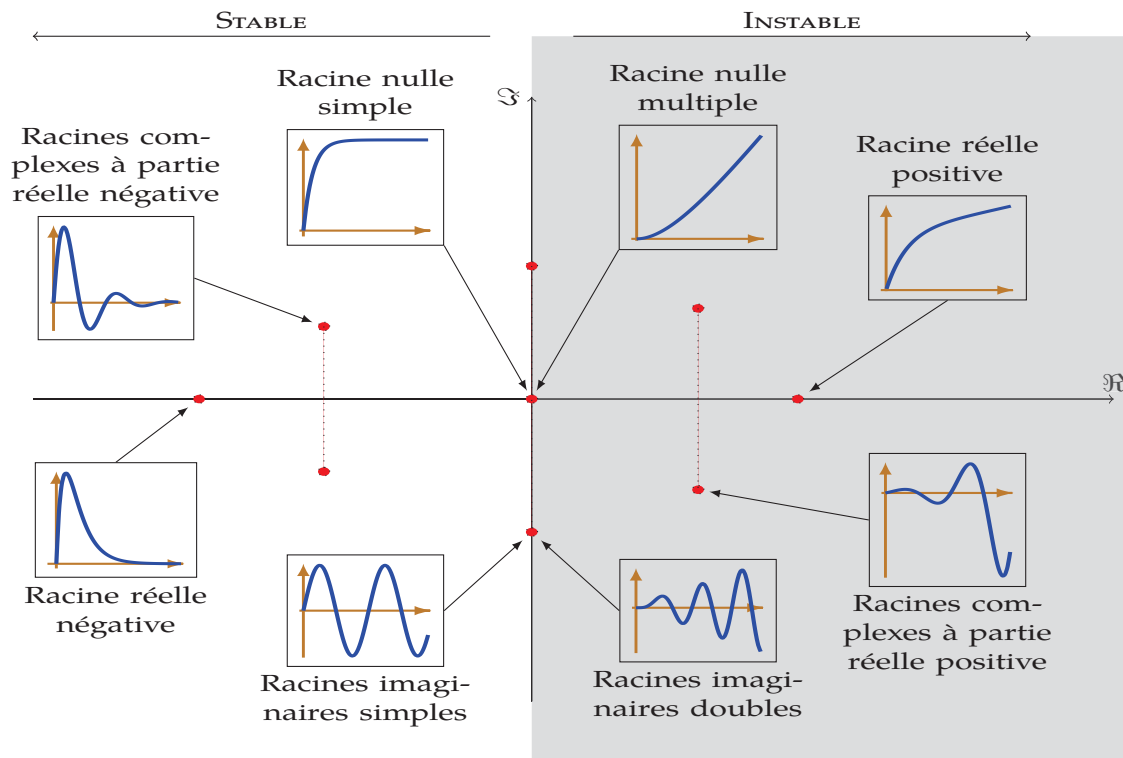


FIGURE 6.3. – Positions des pôles et stabilité et réponse à une impulsion de Dirac

Il suffit donc d'étudier les racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée pour savoir si le système est stable ou instable. Mais si on sait résoudre des polynômes de degré 1, 2, 3 voire 4, on ne sait pas déterminer de manière systématique les racines d'un polynôme de degré supérieur nous verrons plus loin qu'il existe des outils qui à défaut de nous donner les racines nous indiquent le signe de celles-ci.

### 6.2.5. Critères de stabilité

La connaissance des racines permet de déduire si le système est stable, mais il n'est pas possible de déterminer analytiquement les racines d'un polynôme de degré élevé. Les critères ci-dessous nous permettent de déterminer le signe des racines sans avoir besoin de déterminer les racines. On distingue les critères algébriques et les critères graphiques.

**a ). Équation caractéristique**

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$BF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0}{b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0}$$

on appelle équation caractéristique :

$$D(p) = 0$$

$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + b_1 \cdot p^1 + b_0 = 0.$$

**b ). Condition nécessaire**

**Énoncé (Condition nécessaire de stabilité)** Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que  $b_n$ .

**c ). Systèmes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre**

Pour les systèmes du premier et du second ordre, la condition nécessaire est une condition suffisante.

**Premier ordre :** Soit  $H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ , pour que le système soit stable, il suffit que  $\tau > 0$ .

**Second ordre :**

$z > 1$  : Soit  $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$ , pour que le système soit stable, il suffit que  $\tau_1 > 0$  et  $\tau_2 > 0$ .

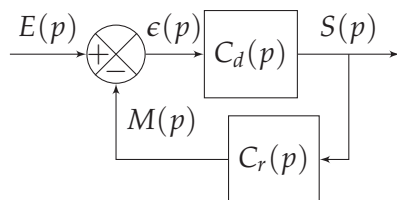
$z = 1$  :  $H_2(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$ , il suffit que  $\tau > 0$

$0 < z < 1$  :  $G(p) = \frac{K}{(p - r_1) \cdot (p - r_2)}$  avec  $r_1 = a + i \cdot b$  et  $r_2 = a - i \cdot b$ , le système est stable si  $a < 0$ . La fonction de transfert s'écrit donc :  $G(p) = \frac{K}{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p + b^2 \cdot p^2}$ . Tous les coefficients sont positifs

**d ). Critère graphique du revers**

Les critères graphiques permettent d'étudier la stabilité d'un système à partir de la représentation graphique de la fonction de transfert en boucle ouverte. Cette étude peut être conduite à partir des diagrammes de Bode, ou de la représentation dans le plan complexe de la fonction de transfert.

Soit  $G(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée du système décrit par le schéma bloc ci-dessous, avec  $BO(p)$  la fonction de transfert en boucle ouverte.



$$BF(p) = \frac{C_d(p)}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} = \frac{C_d(p)}{1 + BO(p)}$$

Nous savons que l'étude de la stabilité se résume à la recherche du signe des racines du dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée.

$$D(p) = 0$$

$$1 + BO(p) = 0$$

## 6. Analyse des systèmes asservis

cette condition peut aussi écrire sous la forme

$$BO(p) = -1$$

Étudier  $BO(p) = -1$  revient à étudier le lieu (le tracé de la fonction de transfert) de la fonction  $BO(p)$  par rapport au point  $(-1, 0)$  du plan complexe. Le point  $(-1, 0)$  est appelé *point critique*. La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.

L'étude peut être réalisé aussi bien dans le plan complexe que sur les diagrammes de de Bode.



**Énoncé (Critère du revers dans le plan complexe)** Un système asservi linéaire est stable si, en parcourant dans le sens des pulsations croissantes le lieu de transfert dans le plan complexe de la FTBO on laisse le point critique  $(-1, 0)$  sur la gauche (figure 6.4). Il est instable dans le cas contraire.

**Remarque :** ce critère dit *critère du revers dans le plan de Nyquist* n'est plus explicitement au programme, il n'est utilisé ici que pour préciser la problématique graphique.

Ce critère initialement défini dans le plan complexe peut être transposé dans le plan de Bode (diagrammes de Bode) en considérant que le point critique  $(-1, 0)$  du plan complexe devient dans le plan de Bode le point de coordonnées  $(0 \text{ dB}, -180^\circ)$ .

Ce point est représenté :

- sur le diagramme d'amplitude par l'axe des abscisses  $A_{dB} = 0 \text{ dB}$ ,
- sur le diagramme de phase par la droite d'ordonnée  $\phi = -180^\circ$ .

L'énoncé du critère du revers dans la plan de Bode prend deux formes, une pour le diagramme d'amplitude, l'autre pour le diagramme d'argument.

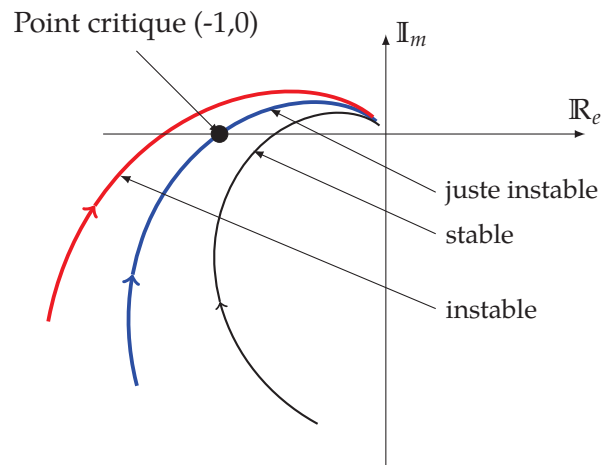


FIGURE 6.4. – Critère du revers dans le plan complexe

**Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode)** Un système asservi est stable si, pour la pulsation  $\omega_{C0}$  définie par  $|BO(j \cdot \omega_{C0})| = 1$  (soit  $0 \text{ dB}$ ) de la fonction de transfert en boucle ouverte, le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$  (figure 6.5).

ou

**Énoncé (Critère du revers dans le plan de Bode)** Un système asservi est stable, si pour la la pulsation  $\omega_{180}$  définie par  $\arg BO(j \cdot \omega_{180}) = -180^\circ$  de la fonction de transfert en boucle ouverte l'amplitude en décibel est négative.

Une seule de ces définitions suffit si les courbes sont monotones décroissantes.

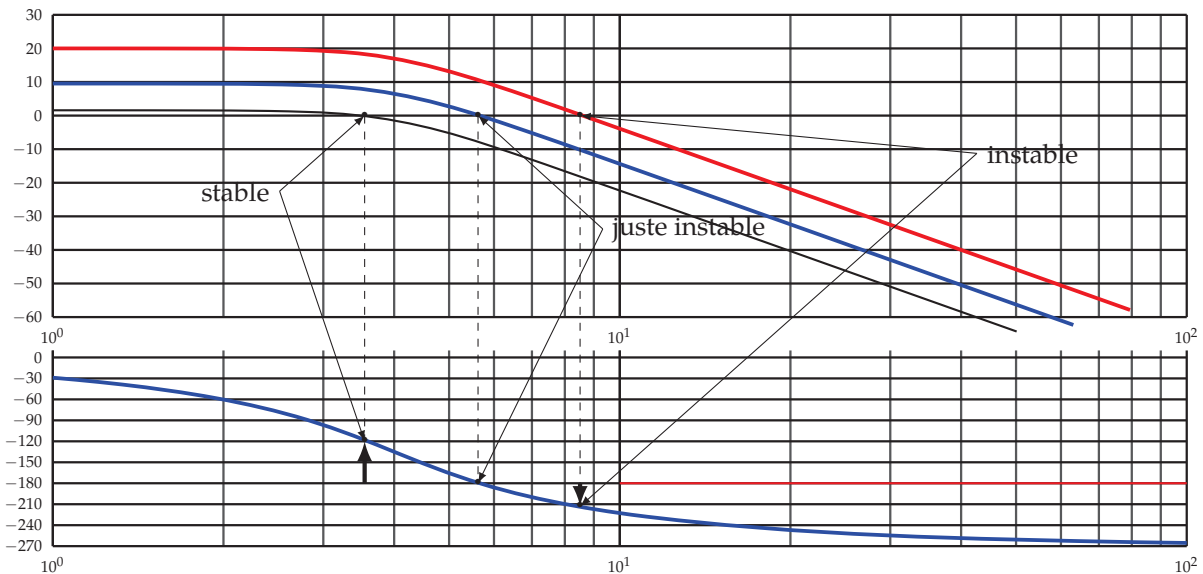


FIGURE 6.5. – Critère du revers à partir des diagrammes de Bode

Pour les diagrammes qui présentent plusieurs passages autour de  $-180^\circ$  pour l'argument ou autour de 0 dB pour l'amplitude, il est nécessaire de vérifier pour tous les points particuliers les deux versions du critère.

**Remarque :** L'utilisation du critère de revers dans le plan de Bode est à manipuler avec précaution, en effet, contrairement à son application dans le plan complexe (critère de Nyquist) où l'on a une vision globale du lieu de transfert, sur les diagrammes de Bode, le tracé est décomposé sur deux graphes et il est obligatoire de s'intéresser aux deux pour évaluer la stabilité.

**Les limites du critère du revers** Le critère du revers ne peut s'appliquer avec certitude que sur des fonctions de transfert régulières en boucle ouverte.

Une fonction de transfert régulière est une fonction de transfert qui ne possède pas de pôle (racines du dénominateur) ou de zéro (racines du numérateur) à partir réelle positive.

Ainsi pour le système dont la FTBO s'écrit :

$$BO(p) = \frac{10}{(1 + 2 \cdot p) \cdot (1 - 0,1 \cdot p) \cdot (1 + \frac{p}{3}) \cdot (1 + 10 \cdot p)}$$

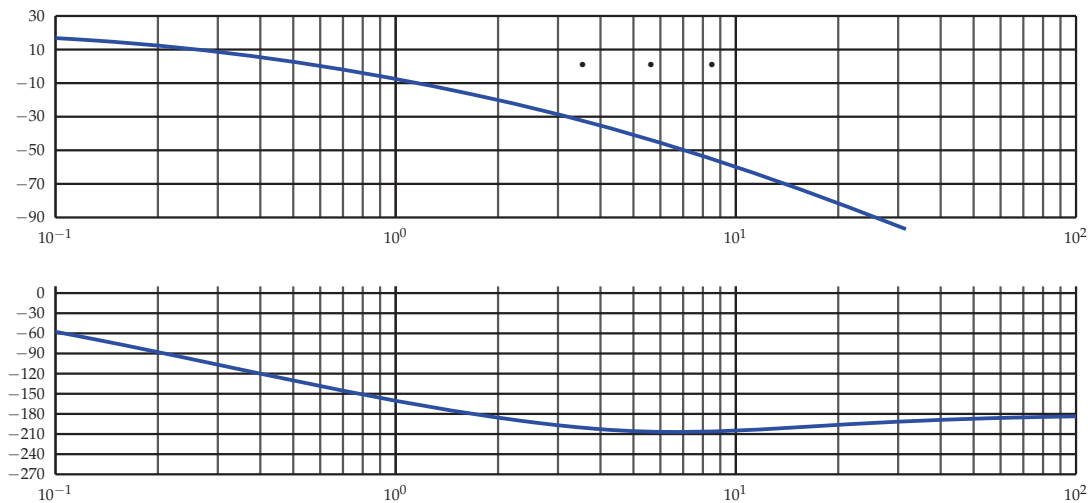


FIGURE 6.6. – Les limites du critère du revers

Le tracé des diagrammes de Bode de la FTBO figure 6.6) semble indiquer que la FTBF est stable, mais le simple calcul des coefficients de la FTBF montre que le système est instable (coefficients négatifs et positifs, la condition nécessaire n'est pas remplie).

$$BF(p) = \frac{BO(p)}{1 + BO(p)} = -\frac{300}{-330 - 683 \cdot p - 35 \cdot p^2 - 128 \cdot p^3 + 20 \cdot p^4}$$

Le critère du revers est la version limitée aux fonctions de transfert régulières d'un critère graphique plus complet, le critère de Nyquist.

## 6.2.6. Marges de stabilité

Les critères ci-dessus sont des critères de stabilité absolue, ils permettent de répondre à la question binaire : le système est-il stable ou instable ?

La réponse à cette question ne permet pas de régler et d'optimiser le fonctionnement d'un système. Il est nécessaire, pour cela, d'identifier un ou plusieurs paramètres qui permettent de régler le système asservi afin d'avoir le comportement souhaité en terme d'oscillations de la réponse temporelle.

## a ). Influence de la position de la FTBO par rapport au point critique

On se propose d'évaluer l'influence de la distance entre le lieu de transfert de la FTBO et le point critique sur le comportement temporel du système asservi.

Soit le système décrit par le schéma bloc de la figure 6.7a

Sur la figure 6.7b sont représentée la réponse temporelle à un échelon pour différentes valeurs du gain  $K$  et sur la figure 6.7c les diagrammes de Bode pour ces mêmes valeurs.

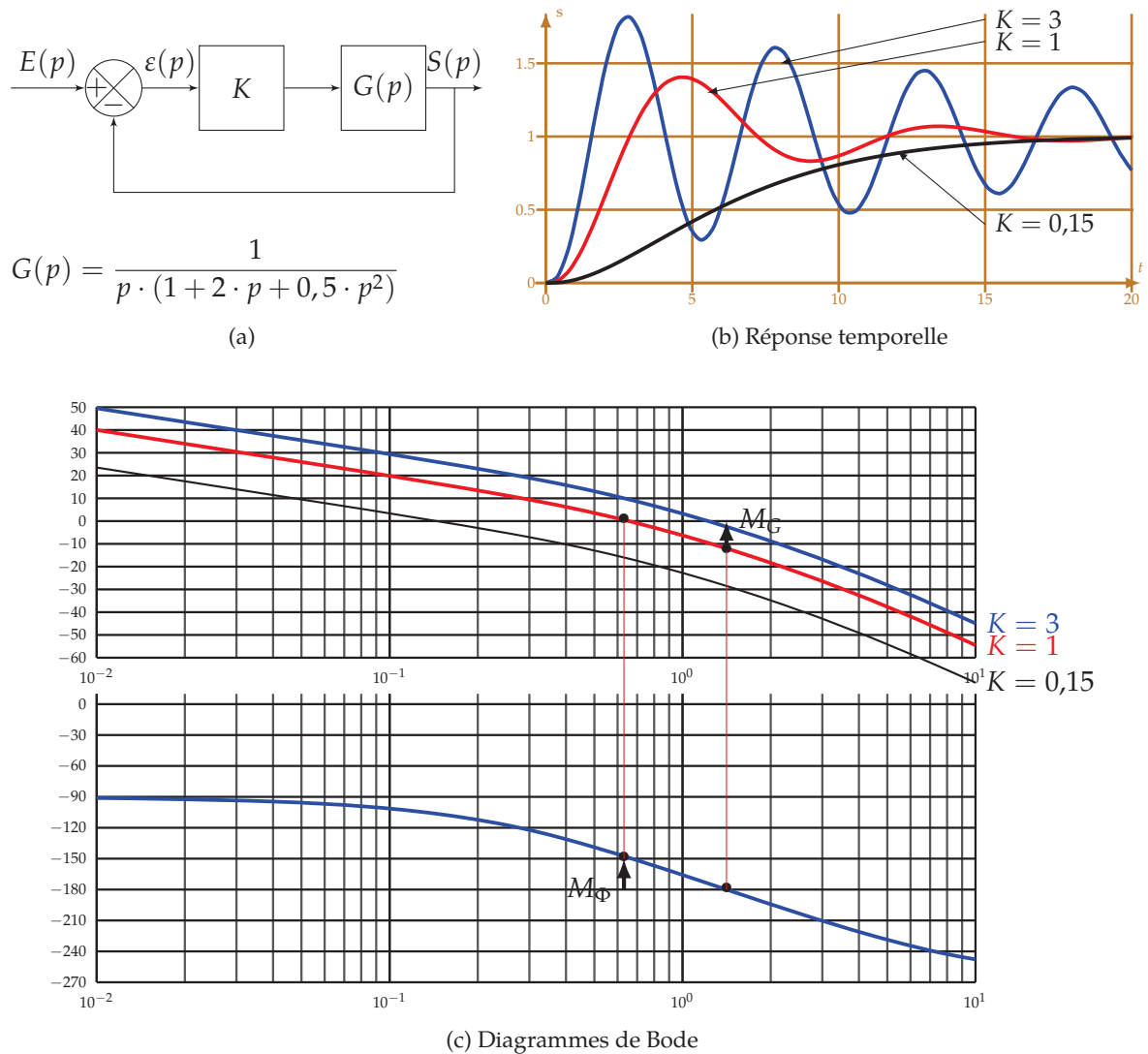


FIGURE 6.7. – Influence de la distance au point critique

Les figures 6.8 page suivante précisent les marges de phase et de gain pour les différents valeurs de  $K$ .

$K = 1$  : La distance entre la courbe de phase et le point critique ( $0 \text{ dB}$ ,  $-180^\circ$ ) est d'environ  $30^\circ$  et la distance entre la courbe de gain et le point critique est d'environ  $15 \text{ dB}$ . La réponse temporelle oscille mais converge en peu d'oscillations.

$K = 3$  : La distance mesurée en degré entre la courbe de phase et le point critique est très faible. Il en est de même la distance entre la courbe de gain et le point critique. On note qu'alors la réponse temporelle est fortement oscillante.

$K = 0,15$  : La courbe de phase et la courbe de gain sont éloignées du point critique. La réponse temporelle ne présente pas d'oscillations.

Les réponses temporelles sont caractéristiques d'un système stable mais on constate que le comportement temporel est d'autant plus oscillant que la distance entre la courbe de gain et  $0 \text{ dB}$  pour  $\omega_{180}$

## 6. Analyse des systèmes asservis

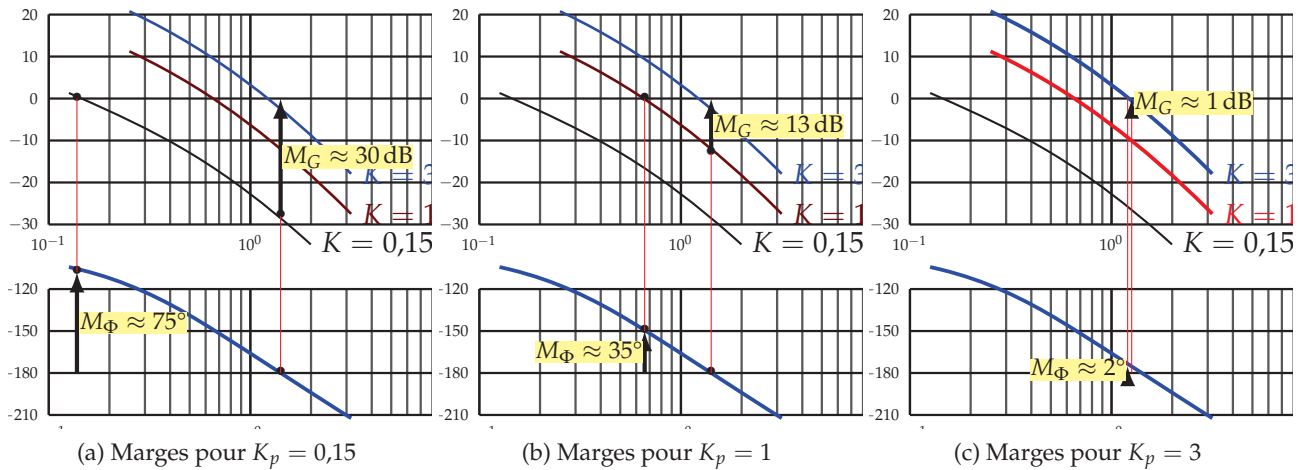


FIGURE 6.8. – Marges de phase et de gain pour différentes valeur de  $K$

est faible et / ou que la distance entre la courbe de phase et  $-180^\circ$  est faible.

### b ). Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

Il est donc possible, à partir de la représentation fréquentielle, de prévoir l'allure de la réponse temporelle et d'ajuster le système pour avoir un comportement correct, il suffit pour cela de régler une « distance » minimale entre le point critique et le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cette distance est appréciée par les deux marges de stabilité : la *marge de gain*  $M_G$  et la *marge de phase*  $M_\Phi$ .

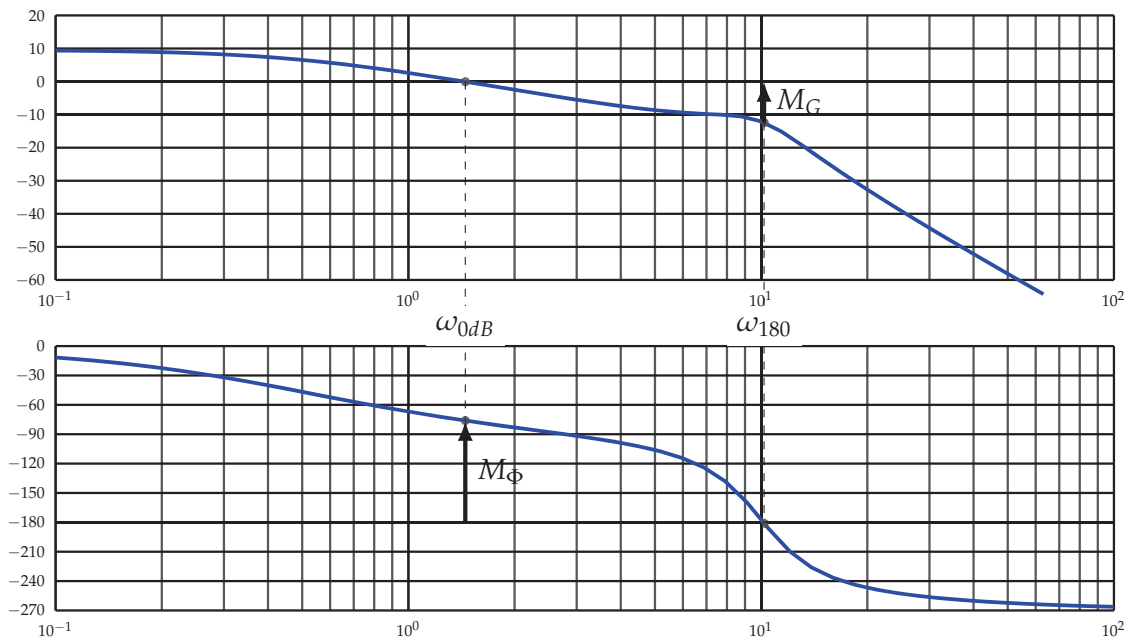


FIGURE 6.9. – Marges de stabilité sur les diagrammes de Bode

**Marge de Gain** La marge de gain est mesurée sur le diagramme d'amplitude (figure 6.9), entre la courbe de gain de la FTBO et l'axe des abscisses pour la pulsation  $\omega_{180}$ . Le sens positif est compté de la courbe vers l'axe des abscisses.

On note  $\omega_{180}$ , la pulsation telle que  $\arg(BO(j\omega_{180})) = -180^\circ$ .

$$M_G = -20 \cdot \log(|BO(j \cdot \omega)|)$$

**Marge de Phase** La marge de phase est mesurée sur le diagramme de Phase entre l'ordonnée  $-180^\circ$  et la courbe de phase de la FTBO pour la pulsation  $\omega_{0dB}$ . le sens positif est compté de l'ordonnée  $-180^\circ$  à la courbe.

On note  $\omega_{0dB}$ , la pulsation telle que  $20 \log (|BO(j\omega_{0dB})|) = 0dB$

$$M_\Phi = \arg (BO(j\omega_{0dB})) - (-180^\circ)$$

Les valeurs usuelles de réglage des marges de gain et de phase sont :

**Marge de Gain**  $M_G$  de 10 dB à 15 dB;

**Marge de Phase**  $M_\Phi$  de  $40^\circ$  à de  $50^\circ$ .

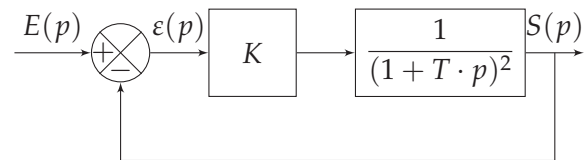
Ces valeurs correspondent à un comportement oscillatoire amorti analogue à celui d'un second ordre avec un coefficient d'amortissement  $\zeta \approx 0,5$ .

### c ). Marge de phase et dépassements

Il n'y a pas de relation généralisable entre la marge de phase (mesurée sur la FTBO) et les dépassements de la réponse temporelle à un échelon de la FTBF, mais il est possible dans le cas d'un second ordre d'évaluer l'influence de la marge de phase.

Soit le système du second ordre avec une racine double décrit par le schéma bloc ci-contre.

La FTBO s'écrit :



$$BO(p) = \frac{K}{(1 + T \cdot p)^2}$$

et la FTBF

$$BF(p) = \frac{K}{1 + K} \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot T}{1 + K} \cdot p + \frac{T^2}{1 + K} \cdot p^2}$$

avec

— pulsation propre :  $\omega_{nf} = \frac{\sqrt{1 + K}}{T}$

— coefficient d'amortissement :  $\zeta_f = \frac{1}{\sqrt{1 + K}}$

— gain :  $K_f = \frac{K}{1 + K}$

On peut en déduire le premier dépassement relatif :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \zeta_f}{\sqrt{1 - \zeta_f^2}}} = e^{\frac{-\pi}{\sqrt{K}}}$$

Le module et l'argument de la fonction de transfert complexe  $BO(j \cdot \omega)$  s'écrivent :

$$A(\omega) = |BO(j \cdot \omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - T^2 \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot T^2 \cdot \omega^2}}$$

$$\Phi(\omega) = \arg(BO(j \cdot \omega)) = -\arctan \left( \frac{2 \cdot T \cdot \omega}{1 - T^2 \cdot \omega^2} \right)$$

## 6. Analyse des systèmes asservis

On cherche la pulsation  $\omega_{0dB}$  pour laquelle  $A(\omega) = 1$ , on trouve :

$$\omega_{0dB} = \frac{\sqrt{K-1}}{T} \quad \text{avec } K > 1$$

d'où la marge de phase

$$M_{\Phi} = \Phi(\omega_{0dB}) + 180^{\circ} = -\arctan\left(\frac{2 \cdot \sqrt{K-1}}{2-K}\right) + 180$$

On peut donc tracer l'évolution du dépassement  $D_{1\%}$  en fonction de la marge de phase (figure 6.10).

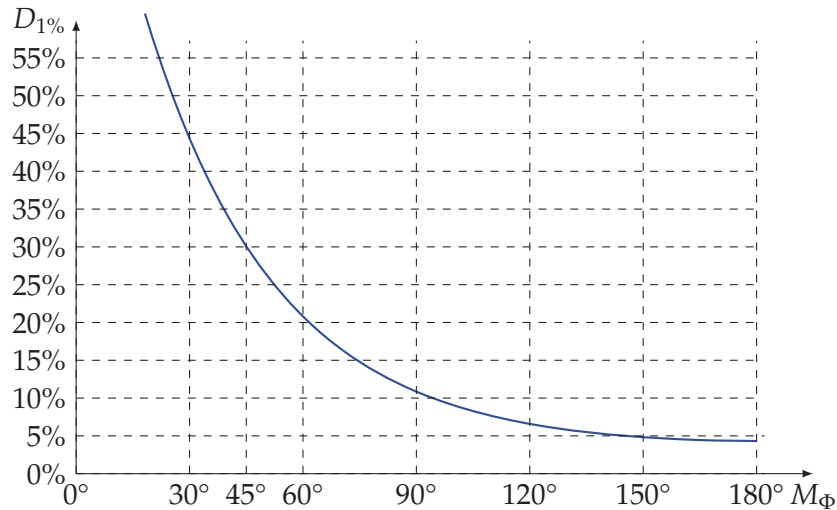


FIGURE 6.10. – Dépassement en fonction de la marge de phase

On remarque que le premier dépassement relatif est d'autant plus important que la marge de phase est petite.

Les réglages usuels pour la marge de phase,  $M_{\Phi}$  de  $40^{\circ}$  à  $50^{\circ}$  correspondent à des dépassement variants de  $35\%$  à  $25\%$ .

Un dépassement inférieur à  $5\%$  nécessite une marge de phase supérieure  $140^{\circ}$ .

Ce comportement n'est pas généralisable à toutes les fonctions de transfert, mais chaque fois que l'on peut modéliser le comportement d'un système par un second ordre, on peut s'inspirer de ces résultats pour régler le système.

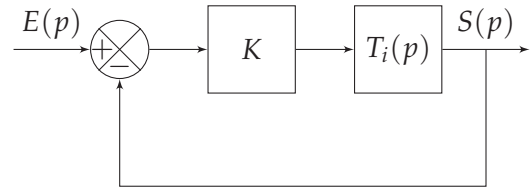
### 6.3. Feuille de travaux dirigés n°6a

#### Exercice 1 - Applications du cours

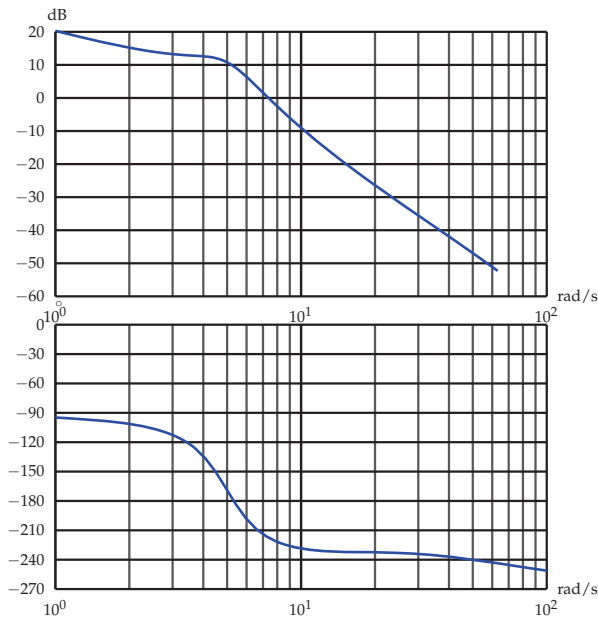
Corrigé page 23

#### A. Critère du revers dans le plan de Bode

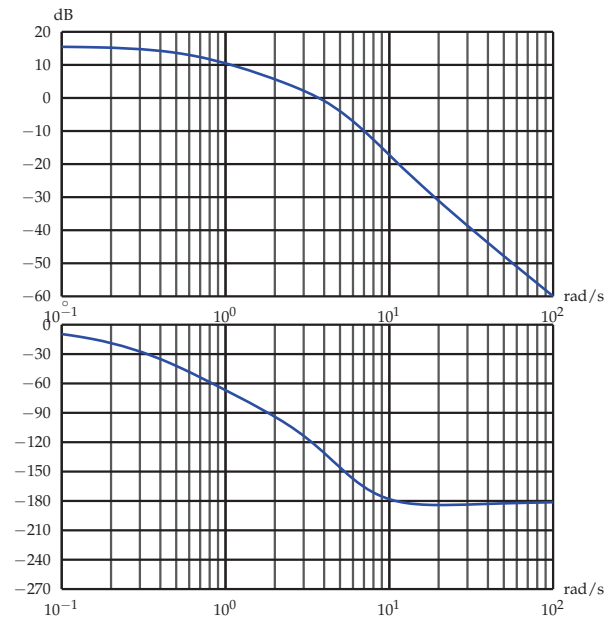
Chaque système est décrit par le schéma bloc ci-contre.



**Q1.** Pour chacune des fonctions de transfert en boucle ouverte tracées (pour  $K = 1$ ) sur les figures 6.11a et 6.11b déterminer par le critère du revers si le système en boucle fermée est stable. Préciser la valeur maxi de  $K$  pour que le système soit juste instable.



(a) Diagramme de Bode de  $T_1(p)$



(b) Diagramme de Bode de  $T_2(p)$

FIGURE 6.11. – Étude graphique de la stabilité

#### B. Stabilité graphique

La FTBO du système étudié est définie par :  $H_1(p) = \frac{160}{p(16 + 2 \cdot p + p^2)}$

**Q2.** Tracer les diagrammes de Bode. Le système est-il stable en boucle fermée ?

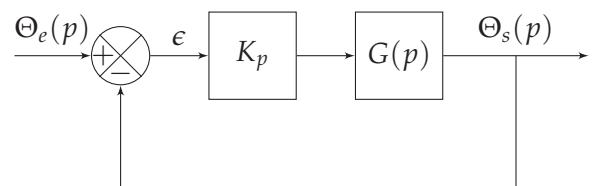
**Q3.** Déterminer graphiquement la valeur de  $K_p$  pour la juste instabilité

#### C. Stabilité d'un second ordre avec intégration

Soit le système décrit par le schéma bloc ci-contre avec

$$G(p) = \frac{K}{p \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2} \right)}$$

pour les valeurs suivantes :



## 6. Analyse des systèmes asservis

$$- G(p) = G_1(p) = \frac{5}{p(1+4 \cdot p)(1+0,1 \cdot p)}$$

$$- G(p) = G_2(p) = \frac{1}{p \cdot (1+0,2 \cdot p)^2}$$

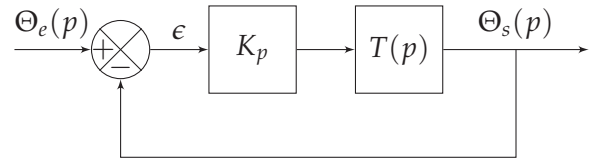
**Q4.** Déterminer analytiquement la valeur de  $K_p$  pour laquelle le système est juste instable.

**Q5.** Déterminer  $K_p$  afin que la marge de phase soit  $M_\phi > 45^\circ$  et la marge de gain  $M_G > 15$  dB.

### D. Stabilité d'un second ordre généralisé avec un zéro positif

$$\text{Soit } T(p) = \frac{1 - 0,2 \cdot p}{1 + 4 \cdot p + 100 \cdot p^2}$$

**Q6.** Déterminer la condition sur  $K_p$  pour que le système soit stable



## Exercice 2 - Étude de l'asservissement de force

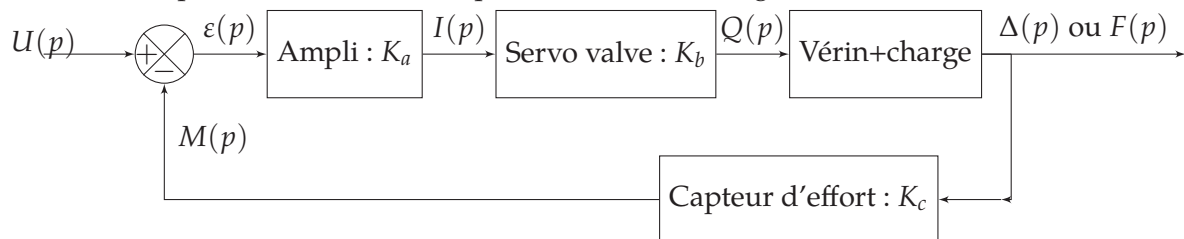
Centrale 1998

Corrigé page 25

On se propose de caractériser le fonctionnement d'un tribomètre<sup>1</sup> utilisé pour étudier les surfaces frottantes des freins du T.G.V.

Le cahier des charges du tribomètre indique que la force à laquelle doit être soumis le plot frottant est comprise entre 40 N et 800 N. Cette force doit pouvoir évoluer selon des lois reproduisant les principales conditions de freinage rencontrées lors de l'exploitation du T.G.V. La fréquence d'utilisation est inférieure à 200 Hz.

Toutes ces contraintes ont amené à concevoir un dispositif d'asservissement en force (ou en pression) suivant la disposition suivante (diagramme des blocs) :



### A. Étude de la servovalve

Le constructeur de la servovalve a fourni les courbes caractéristiques de la servovalve à la pression d'utilisation (figures 6.12a et 6.12b).

**Q1.** On identifie la servo-valve à un modèle de système continu du premier ordre.

**Q1a.** Préciser la fonction transfert  $Sv(p)$ .

**Q1b.** Justifier ce choix en vous aidant des diagrammes fournis par le constructeur. Évaluer la constante de temps de la servo-valve et le gain statique de la servo-valve.

**Q1c.** En quoi ce choix est-il critiquable?

### B. Détermination de la fonction de transfert

L'étude suivante se propose de définir la fonction de transfert du bloc « vérin et charge ». Les équations différentielles à prendre en compte sont les suivantes :

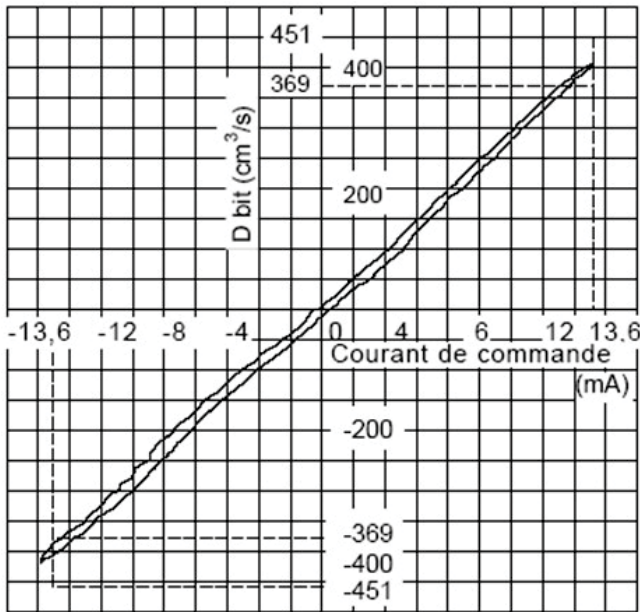
$$- \text{Équation de débit : } q(t) = S \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{V}{2 \cdot B} \frac{d\delta_p(t)}{dt}$$

$$- \text{Équation des forces : } S \cdot \delta_p(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + r \cdot x(t)$$

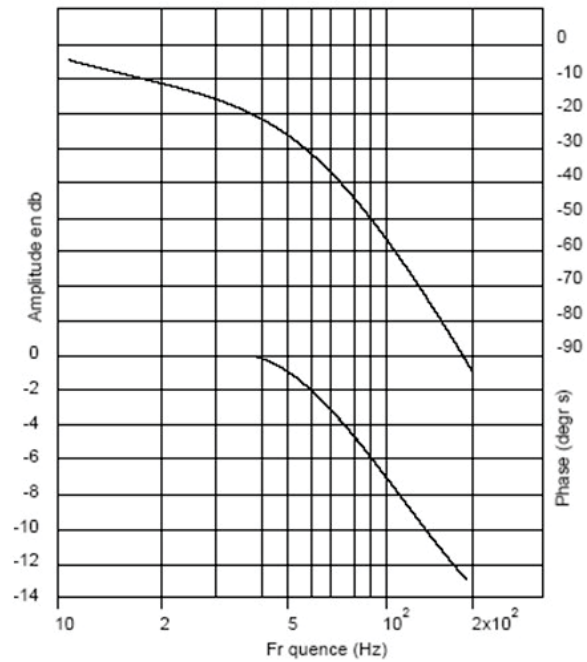
Avec :

1. Un tribomètre permet de mesurer le coefficient de frottement





(a) Caractéristique



(b) Réponse fréquentielle

$q(t)$  Débit

$S$  Surface de poussée du vérin

$V$  Volume du vérin et des tuyaux

$\delta_p(t)$  Différence de pression sur les deux faces du piston

$M$  Masse à mettre en mouvement

$B$  Coefficient de compressibilité du fluide

$f$  Coefficient de frottement visqueux

$r$  Raideur mécanique

$x(t)$  Déplacement de la tige du vérin

Données numériques :

—  $S = 133 \text{ mm}^2$

—  $V = 10 \text{ cm}^3$

—  $B = 10\,000 \times 10^5 \text{ Pa}$

—  $M = 4 \text{ kg}$

—  $r_h + r = 3,8 \times 10^6 \text{ N m}^{-1}$

—  $f = 2\,800 \text{ N m}^{-1} \text{ s}$

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert  $H_1(p) = \frac{\Delta P(p)}{Q(p)}$  en fonction de  $B, V, r, r_h, M, f$  avec  $r_h = \frac{2 \cdot B \cdot S^2}{V}$  la raideur hydraulique du vérin. Montrez que  $H_1(p)$  s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{p} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

avec  $N_1(p)$  et  $D_1(p)$  deux polynômes en  $p$  avec  $N_1(0) = 1$  et  $D_1(0) = 1$ .

**Q3.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $B_o(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$ .

Pour la suite, on pose pour  $K_a = 1$  et  $K_c = 1$  :

$$B_o(p) = \frac{372}{p} \frac{1}{1 + T_b \cdot p} \cdot \frac{1 + \frac{2 \cdot 1,36}{256} \cdot p + \frac{p^2}{256^2}}{1 + \frac{2 \cdot 0,36}{975} \cdot p + \frac{p^2}{975^2}}$$

Sur la figure 6.12 sont représentés les diagrammes de Bode de  $N_1(p)$  et  $\frac{1}{D_1(p)}$  et  $\frac{1}{1 + T_b \cdot p}$ .

**Q4.** Indiquez sur le graphe à quelles courbes correspondent chacune des fonctions de transfert. Compléter les diagrammes en précisant les asymptotes.

Q5. Compléter les diagrammes en ajoutant l'intégrateur de fonction de transfert  $\frac{372}{p}$ .

Q6. En déduire les diagrammes de Bode réels et asymptotiques de la FTBO.

Q7. Préciser la condition de stabilité en fonction de  $K_a$ .

Q8. Justifier, que dans le domaine de fonctionnement, la FTBO peut être modélisée par  $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ .

Préciser  $K'$ .

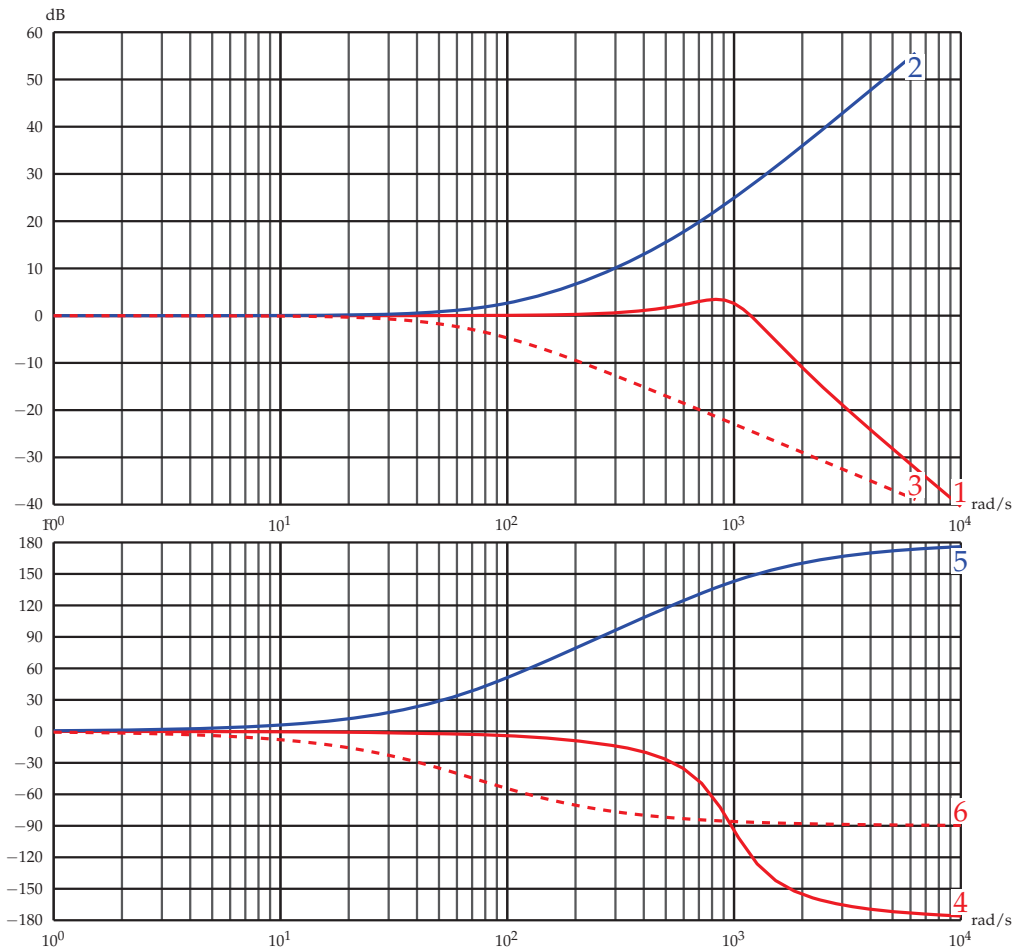


FIGURE 6.12. – Diagrammes de Bode à compléter

La réponse temporelle à un échelon unitaire de l'actionneur du tribomètre est tracée sur la figure 6.13.

On considère la modélisation simplifiée  $B'_o(p) = \frac{K'}{p}$ .

Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée simplifiée  $B'_f(p)$  puis la réponse temporelle pour une entrée en échelon.

Q10. Tracer la réponse temporelle sur la figure 6.13. Que pensez-vous du modèle simplifié.

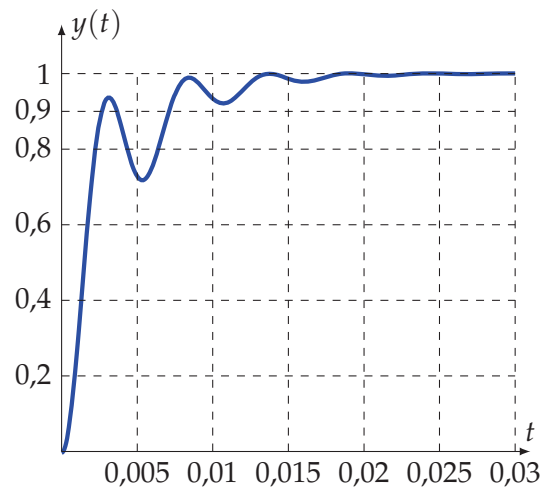


FIGURE 6.13. – Réponse temporelle

**Exercice 3 - Servo vérin de la fusée Ariane 5**

Adapté du concours Centrale MP-2005

Corrigé page 26

**A. Étude du servo-vérin**

L'orientation des tuyères de la fusée Ariane 5 est réalisée par des vérins hydrauliques associés à servo-ventilles.

Pour cette étude le modèle simplifié de comportement utilisé pour un servo-vérin déplaçant une charge de masse est représenté sur la figure 6.14.

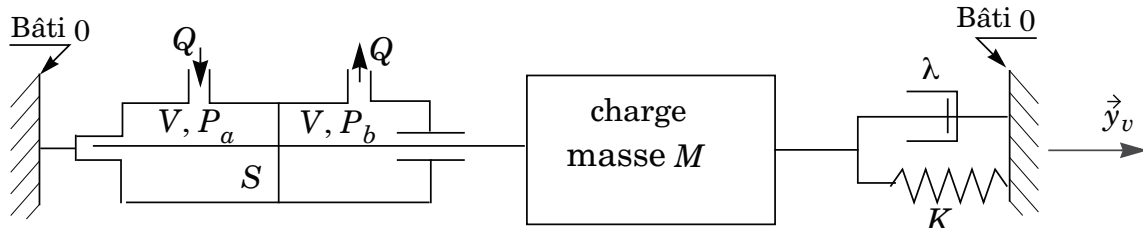


FIGURE 6.14. – modèle d'un servo-vérin

Les caractéristiques du servo-vérin et du fluide utilisé sont :  $S$  la surface utile du vérin et  $B$  le module de compressibilité du fluide.

Soit  $y(t)$  la variation de déplacement de la charge par rapport à la position d'équilibre obtenue en l'absence de pression. La variation  $y(t)$  étant petite, on peut faire les hypothèses suivantes :

- les volumes des deux chambres du vérin sont identiques et égaux à  $V$ ,
- les débits entrant et sortant sont identiques et égaux à  $Q$ .

La charge de masse  $M$  est liée au bâti par un ressort de raideur  $K$  et un amortisseur de coefficient  $\lambda$ .

L'étude hydraulique du servo-vérin et notamment l'étude des débits de compressibilités et de déformations nous permet d'écrire :

$$Q = S \cdot \dot{y}(t) + \frac{V}{2 \cdot B} \cdot \dot{p}(t) \quad \text{avec} \quad p(t) = p_a(t) - p_b(t).$$

L'étude mécanique de la charge nous permet d'écrire :

$$M \cdot \ddot{y}(t) = p(t) \cdot S - K \cdot y(t) - \lambda \cdot \dot{y}(t) \quad [1]$$

Le débit est commandé par un servo-distributeur (association d'une servo-valve et d'un distributeur), non représenté ici et de fonction de transfert :  $K_s$ .

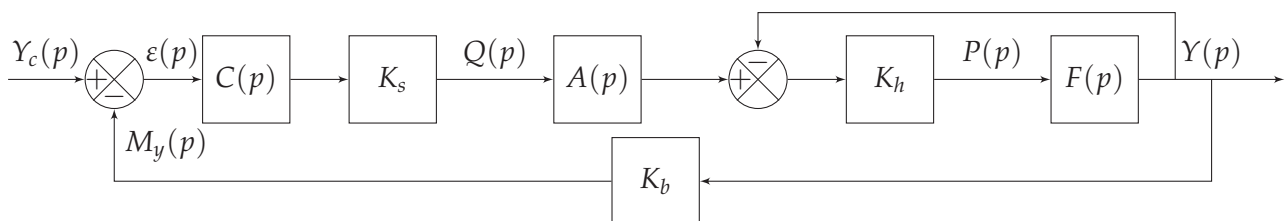


FIGURE 6.15. – Schéma-blocs du servo vérin

La représentation sous forme de schéma-bloc du servo-vérin asservi en position est donnée sur la figure 6.15 avec  $K_b = 1$ . Dans ce schéma-bloc,  $Y_c(p)$  est la transformée de Laplace de la consigne de position  $y_c(t)$  du servo-vérin.

**Q1.** Préciser la démarche à utiliser pour obtenir l'équation [1] : système isolé, bilan des actions mécaniques en précisant leurs expressions, hypothèses simplificatrices formulées, théorème utilisé...

**Q2.** La première étude est menée avec  $C(p) = 1$ . Déterminer les fonctions de transfert  $A(p)$ ,  $F(p)$ , et le gain  $K_h$ .

**Q3.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée :  $BF(p) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$ .

À la suite sont tracés différents diagrammes du servo-vérin asservi en position :

- Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée (figure 6.16).
- Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée (figure 6.17).
- Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (figure 6.18).

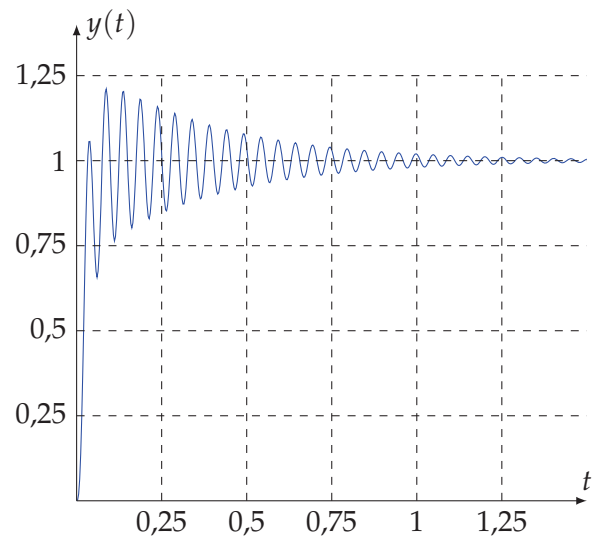


FIGURE 6.16. – Réponse temporelle pour  $C(p) = 1$

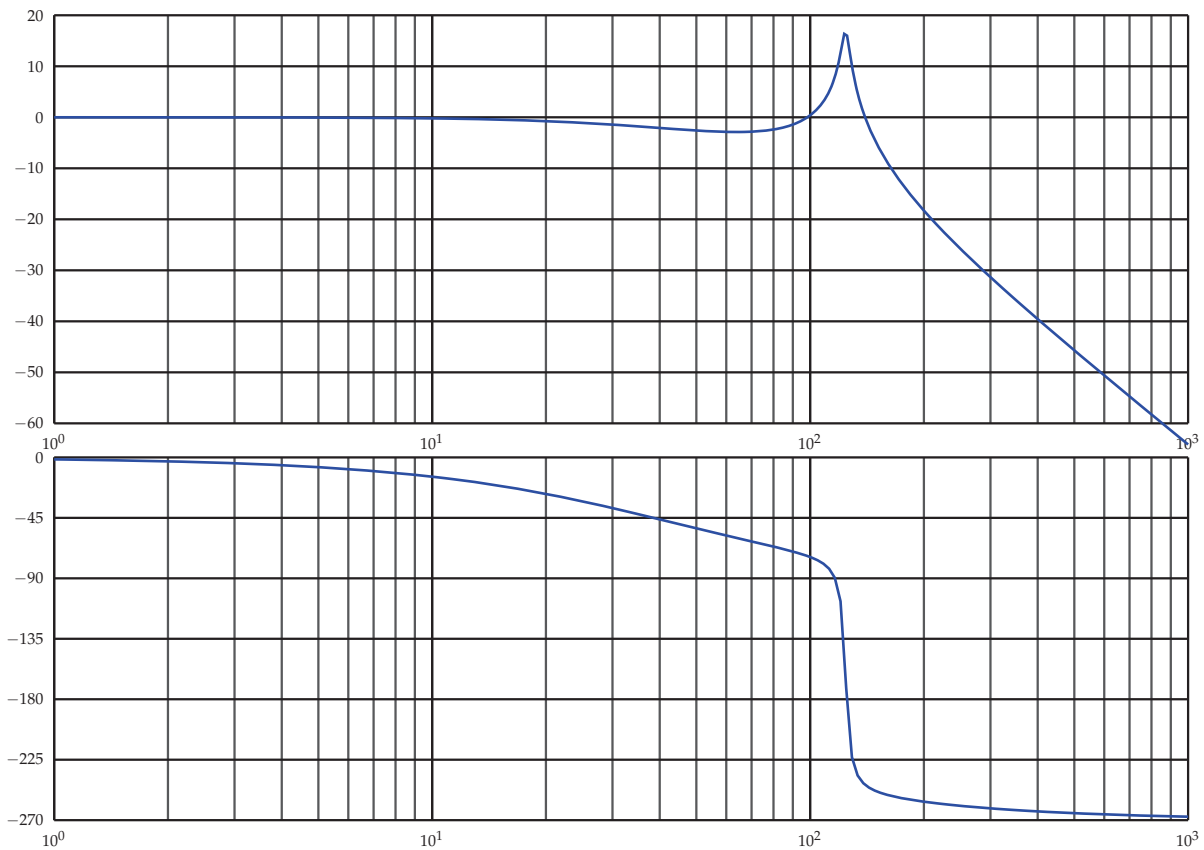


FIGURE 6.17. – Diagrammes de Bode de la FTBF pour  $C(p) = 1$

**Q4.** Justifier que la fonction de transfert en boucle fermée peut être modélisée par :

$$BF(p) = \frac{K}{(1 + \tau_F \cdot p) \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_F}{\omega_{nF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nF}^2}\right)}$$

Préciser les valeurs de  $K$ ,  $\tau_F$  et  $\omega_{nF}$ . Justifier vos réponses. Tracer les asymptotes de la FTBF sur la figure 6.17.

Le cahier des charges du servo-vérin définit certains critères :

- Écart nul en régime permanent en réponse à un échelon de position.
- Temps de réponse à 5%  $\leq 0,15$  s.

— Marge de gain  $MG \geq 6 \text{ dB}$ , marge de phase  $MP \geq 45^\circ$ .

**Q5.** Vérifier si tous les critères ci-dessus sont respectés si  $C(p) = 1$ . Justifier vos réponses.

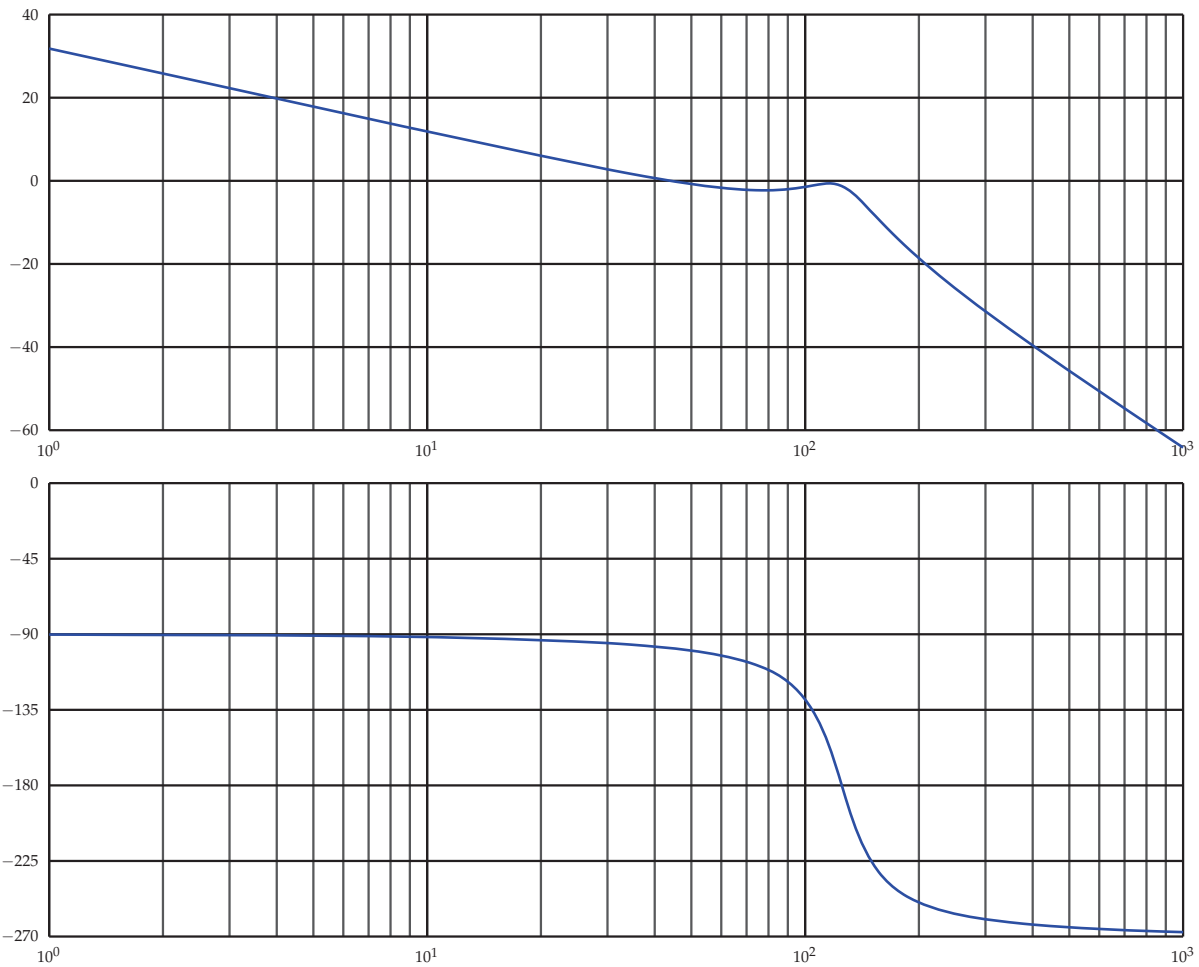


FIGURE 6.18. – Diagrammes de Bode de la FTBO

Le système est corrigé par un dispositif appelé filtre réjecteur. La pulsation propre du filtre réjecteur a été calée sur la pulsation de résonance du système non corrigé. La fonction de transfert du correcteur est :

$$C(p) = \frac{p^2 + 2 \cdot z_1 \cdot \omega_R \cdot p + \omega_R^2}{p^2 + 2 \cdot z_2 \cdot \omega_R \cdot p + \omega_R^2}$$

$$C(p) = \frac{p^2 + 25 \cdot p + 15625}{p^2 + 175 \cdot p + 15625}$$

**Q6.** Tracer l'allure des diagrammes de Bode du correcteur  $C(p)$  sur le diagramme de Bode de la FTBO (figure 6.18), en précisant, les asymptotes et les points particuliers.

**Q7.** En déduire les diagrammes de Bode de la FTBO corrigée.

Deux diagrammes du système corrigé sont proposés :

— Réponse indicielle (entrée unitaire) de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé (figure 6.19).

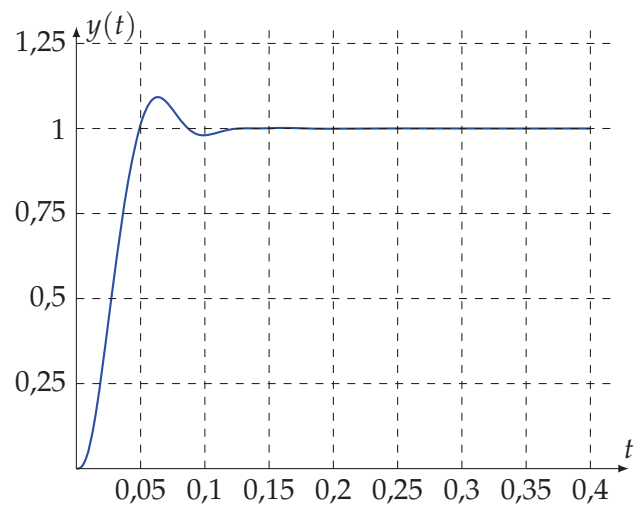


FIGURE 6.19. – Réponse temporelle du système corrigé

— Diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle fermée du système corrigé (figure 6.20).

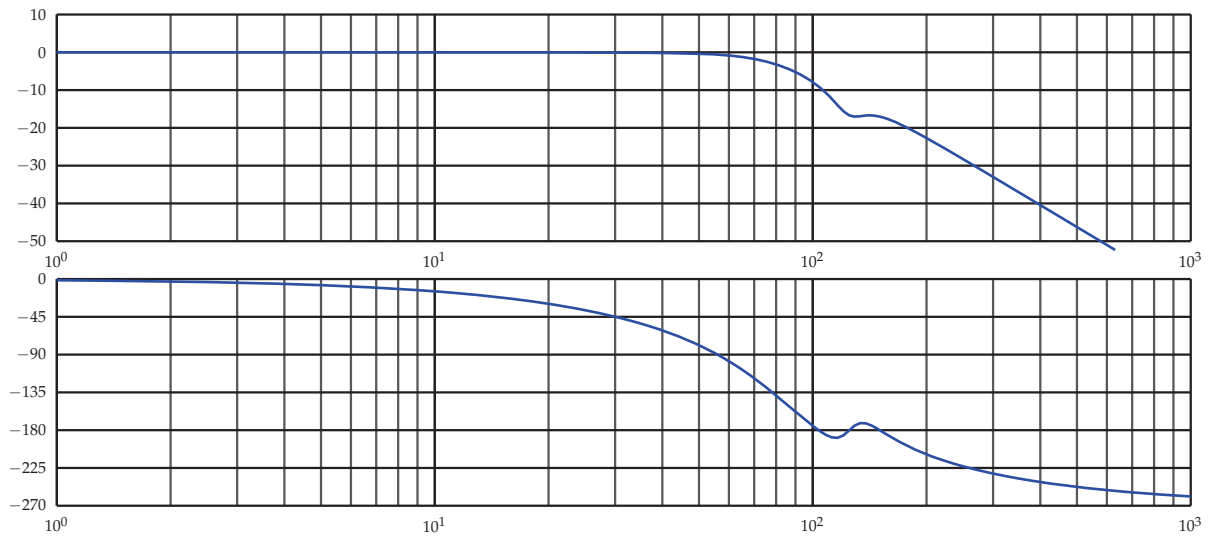


FIGURE 6.20. – Diagrammes de Bode de la FTBF

**Q8.** Conclure quant au respect des critères du cahier des charges définis à la question Q5. En fonction des diagrammes de Bode fournis de la fonction de transfert en boucle fermée et de celui obtenu à la question Q7, préciser l'apport de ce correcteur.