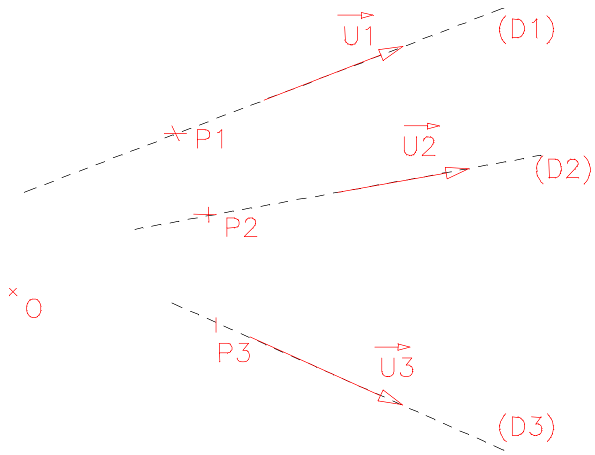
I - ANNEXE : TORSEURS

A. Définitions



Soit un ensemble fini de vecteurs glissants $\left\{\vec{U}_i(D_i)\right\}$.
cet ensemble de vecteur constitue un Torseur. On appelle élément de réduction d'un torseur en un point O de l'espace :

la résultante générale - $\vec{R}_{[T]} = \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i$

Le moment résultant - $\vec{M}_{O[T]} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OP_i} \wedge \vec{U}_i$

Le torseur associé au champ de vecteur est

noté: $\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \vec{U}_i \\ \sum_{i=1}^{n} \vec{OP_i} \wedge \vec{U}_i \end{Bmatrix}_O$

Remarques:

ne jamais omettre le point de réduction du torseur;

Le torseur comporte en fait 6 composantes et peut être noté en détaillant les composantes dans le repère considéré.

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} R_x & M_{Ox} \\ R_y & M_{Oy} \\ R_z & M_{Oz} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

La résultante générale est un invariant.

B. Changement de point de réduction d'un torseur.

Soit $\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O$ le torseur défini par ses éléments de réduction au point O.

Recherchons les éléments de réduction de ce torseur en un point A de l'espace.
Résultante générale: elle est inchangée car invariant.
Moment général:

par définition: $\vec{M}_{A[T]} = \sum_{i=1}^{n} \vec{AP_i} \wedge \vec{U}_i$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP_i}\right)\wedge\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\wedge\overrightarrow{U}_i+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\wedge\overrightarrow{U}_i+\overrightarrow{AO}\wedge\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP_i}\right)\wedge\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}\wedge\overrightarrow{U}_i+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{U}_i$$

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\overrightarrow{M}_{O[\mathrm{T}]}+\overrightarrow{AO}\wedge\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{U}_i \text{ avec } \overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}]}=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{U}_i$$

On a donc

$$\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}=\overrightarrow{M}_{O[\mathrm{T}]}+\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}]}$$

Le torseur au point A s'écrit donc: $\{\mathrm{T}\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}]}\\ \overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}]}\end{Bmatrix}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}]}\\ \overrightarrow{M}_{O[\mathrm{T}]}+\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}]}\end{Bmatrix}_A$

C. Opérations sur les Torseurs

1. Egalité de deux torseurs

Deux torseurs sont égaux s'ils ont mêmes éléments de réductions en un point, réciproquement s'ils ont mêmes éléments de réduction en un point, ils sont égaux

$$\{\mathrm{T}_1\}_A=\{\mathrm{T}_2\}_A \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_1]}=\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_2]}\\ \overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_1]}=\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_2]}\end{Bmatrix}_A$$

2. Torseur nul

Un Torseur est nul si ses éléments de réductions en un point sont nuls. Ces éléments de réductions sont alors nuls en tout point.

3. Additions de deux torseurs

Soit deux torseurs dont les éléments de réductions en un point sont connus alors:

$$\{\mathrm{T}_1\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_1]}\\ \overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_1]}\end{Bmatrix}_A \quad \{\mathrm{T}_2\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_2]}\\ \overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_2]}\end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2\}_A=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_1]}+\overrightarrow{R}_{[\mathrm{T}_2]}\\ \overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_1]}+\overrightarrow{M}_{A[\mathrm{T}_2]}\end{Bmatrix}_A$$

4. Multiplication par un scalaire.

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O \quad \lambda \text{ un réel}$$

$$\lambda.\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \lambda.\vec{R}_{[T]} \\ \lambda.\vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O$$

5. Comoment ou Produit de deux torseurs

On appelle Comoment le nombre $\{T_1\}\times\{T_2\}$. Ce nombre est un invariant, il est indépendant du point ou l'on prend les éléments de réduction des torseurs.

$$\{T_1\}_0 \times \{T_2\}_0 = \vec{R}_{[T_1]}\times\vec{M}_{O[T_2]} + \vec{R}_{[T_2]}\times\vec{M}_{O[T_1]}$$

D. Réduction d'un torseur

1. Objectif de la réduction:

L'objectif de la réduction d'un torseur est de trouver un torseur équivalent au torseur donné mais plus simple.

2. Torseurs spéciaux

a) Torseur Couple:

(1) Définition;

un torseur couple est un torseur particulier pour lequel la résultante est nulle.

$$\{C\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O$$

(2) Propriétés;

P1:
Le moment d'un torseur couple est le même en tout point de l'espace.
P2:
L'automoment du torseur couple est nul: $\mathcal{A}_{\{C\}_O} = \vec{M}_O \times \vec{0} = \vec{0}$

(3) Réduction du torseur couple:

Un torseur couple peut être réduit si nécessaire à 2 vecteurs glissant // de sens opposé et de même module.

b) Torseur Glisseur:

(1) Définition:

un Glisseur est un torseur particulier pour lequel il existe un point A tel que le moment en A du torseur est nul.

$$\vec{M}_{A[T]} = \vec{0}$$

$$\{G\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[G]} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A$$

(2) Propriétés

si $\vec{R}_{[G]} \neq \vec{0}$; pour tous les points P de la droite passant par A et de direction de $\vec{R}_{[G]}$, le moment $\vec{M}_{P[T]} = \vec{0}$. Cette droite $\Delta(A, \vec{R}_{[G]})$ est appelée support de $\{G\}_A$

(3) Condition nécessaire et suffisante:

Pour qu'une torseur de résultante générale non nulle soit un glisseur, il faut et il suffit que sont automoment soit nul. $\mathcal{A}_{\{T\}_O} = \vec{R}_{[T]} \times \vec{M}_{O[T]} = 0$.

3. Réduction générale d'un torseur:

a) Réduction à un glisseur:

Si l'automoment du torseur est nul et la résultante non nulle, on peut réduire le torseur à un glisseur.

b) Réduction à un glisseur + un couple.

Il est toujours possible de réduire un torseur qcq à un torseur couple et à un torseur glisseur.

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M}_{A[T]} \end{Bmatrix}_A$$

E. Point central; Axe central.

1. Définition:

On appelle point central d'un torseur, tout point de l'espace où le moment résultant est colinéaire à la résultante générale.
L'ensemble des points centraux est appelé axe central.

2. Détermination:

Soit le torseur $\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{[T]} \\ \vec{M}_{O[T]} \end{Bmatrix}_O$,

si P est un point de l'axe central on a

$$\vec{M}_{P[T]} = \mu \times \vec{R}_{[T]}$$

$$\vec{M}_{P[T]} = \vec{M}_{O[T]} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_{[T]}$$

D'où la relation suivante (division vectorielle)

$$\vec{OP} = \frac{-\vec{R}_{[T]} \wedge (\mu.\vec{R}_{[T]} - \vec{M}_{O[T]})}{\vec{R}_{[T]}^{\,2}} + \mu.\vec{R}_{[T]}$$

3. Propriétés de l'axe central:

* L'axe central d'un torseur est le lieu des points ou le moment est minimum.
* L'axe central d'un glisseur est une droite de moment nul et est l'axe du glisseur.

4. Réduction canonique d'un torseur:

On appelle réduction canonique d'un torseur, sa réduction en un point de l'axe central.

F. Equiprojectivité du champ des moments d'un torseur

1. Propriété

Le champ des moments d'un torseur est équiprojectif.

2. Propriété inverse

Tout champ équiprojectif est le champ de moment d'un torseur.