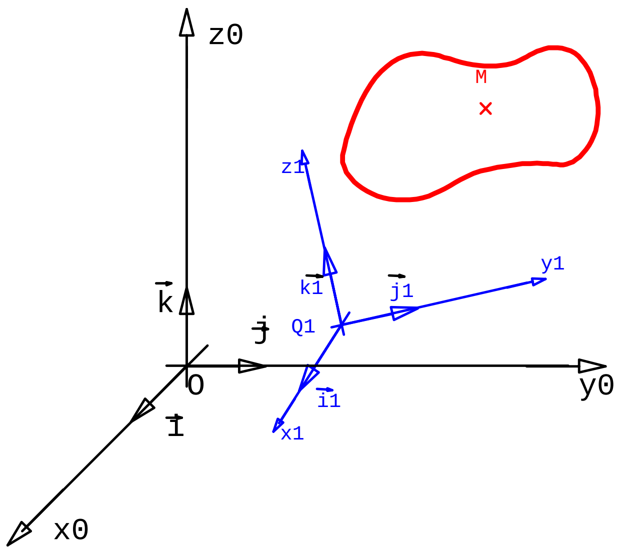
I - SOLIDE INDEFORMABLE

A. Mouvement d'un milieu continu par rapport à un référentiel. Champ des vecteurs vitesses;



On considère le mouvement du solide S1 par rapport au repère R_0. Chaque point M $\in S_1$ possède une vitesse par rapport à R_0

L'ensemble des vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{(M\in S_1/R_0)}}$ constitue le champ des vecteurs vitesses du solide S_1/R_0.

Chaque point M $\in S_1$ possède une accélération par rapport à R_0. L'ensemble des vecteurs accélérations $\overrightarrow{\Gamma_{(M\in S_1/R_0)}}$ constitue le champs des vecteurs accélérations de solide S_1/R_0.

B. Définition du solide indéformable, repères associés;

1. Solide réel

Il est important de définir correctement la notion de solide et d'appréhender les limites du modèle représentant les solides réels.

caractéristiques d'un solide réel:

Masse? constante mais érosion, usure, corrosion,...

Dimensions? constantes mais déformations locales de contact, élasticité du matériaux

Evolution dans le temps: inconnu dans le temps.

Nous nous apercevons que le modèle que nous allons utiliser peut difficilement prendre en compte tous ces phénomènes.

Dans le cadre de la mécanique générale nous utiliserons le modèle du solide indéformable.

2. Solide indéformable

En mécanique générale, un corps solide est un ensemble de points matériels dont les distances mutuelles sont indépendantes du temps.

$$\forall A, \forall B \in S_1 \quad \overrightarrow{AB}^2 = \text{constante}$$

Le solide indéformable est un solide possédant une masse constante et un volume dont les limites sont invariantes quelles que soient les actions extérieures.

On associe au solide S_1 un repère .R_1 nous choisirons comme axe du repère des axes caractéristiques du solide (axe de symétrie, axe de rotation, support d'une translation,...)

C. Equiprojectivité du champ des vecteurs vitesses d'un solide indéformable, torseur distributeur;

1. Equiprojectivité

soient A et B deux points d'un solide S1

$\overrightarrow{AB}^2 = cte$, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = cte$ on a en dérivant par rapport au temps

$$\frac{d\ \overrightarrow{AB}^2}{dt} = 2 \bullet \overrightarrow{AB} \bullet \left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0$$

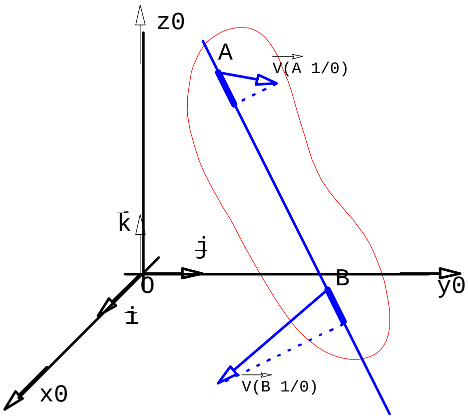
on a aussi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\ \overrightarrow{A0}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\ \overrightarrow{OB}}{dt}\right]_0$$

$$\left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\ \overrightarrow{OB}}{dt}\right]_0 - \left[\frac{d\ \overrightarrow{OA}}{dt}\right]_0 \text{ donc } \left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{V_{(B1/0)}} - \overrightarrow{V_{(A1/0)}}$$

en effectuant le produit scalaire avec $\overrightarrow{AB}$ on obtient

$$\overrightarrow{AB} \bullet \left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{V_{(B1/0)}} - \overrightarrow{V_{(A1/0)}}\right) = 0$$



$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{V_{(B1/0)}} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{V_{(A1/0)}}$$

Le Champ des vitesses est équiprojectif, c'est à dire que les projections du vecteur vitesse de deux point A et B sur la droite joignant ces deux points sont égales en valeur algébrique. Cette propriété est très importante elle nous permettra de déterminer graphiquement la vitesse d'un point d'un solide connaissant la vitesse d'un autre point.

2. Torseur distributeur des vitesses de S1 par rapport à R0.

Le champ des vitesses d'un solide étant équiprojectif, ce champ est le champ des moments d'un torseur appelé torseur distributeur des vitesses de S_1 par rapport à R_0.

a) Etude des Torseurs

Voir fiche outil Torseur

b) Elément de réduction du Torseur distributeur des vitesses.

Nous recherchons une relation entre $\overrightarrow{V_{(A1/0)}}$ et $\overrightarrow{V_{(B1/0)}}$.

nous avons montré que $\left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{V_{(B1/0)}} - \overrightarrow{V_{(A1/0)}}$, A et B étant deux points de S_1 donc

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur fixe de R1. Si le vecteur rotation de R_1/R_0 est $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$, on peut donc écrire (dérivée d'un vecteur):

$$\left[\frac{d\ \overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{V_{(B1/0)}} - \overrightarrow{V_{(A1/0)}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{V_{(B1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A1/0)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Cette relation est la relation caractéristique entre les vecteurs moments d'un torseur (Cf. fiche outil Torseur), le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ est la résultante générale du torseur.
Le torseur distributeur des vitesses a donc pour éléments de réduction en A :

$$\{V_{S1/0}\}_A = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{(A1/0)}} \end{Bmatrix}_{R_0}$$

3. Propriétés du torseur distributeur des vitesses S1/R0

L'axe central du torseur $\{V_{S1/0}\}_A$ est appelé <u>axe hélicoïdal instantané</u> ou <u>axe de viration</u> (Δ).

Un point P situé sur l'axe (Δ) est tel que sa vitesse $\overrightarrow{V_{(P1/0)}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$.
On peut définir le mouvement de S_1/R_0 comme étant la combinaison de deux mouvements: un mouvement de translation $\overrightarrow{V_{(P1/0)}}$ //(Δ) et un mouvement de rotation autour de (Δ) de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$.

D. Champ des vecteurs accélérations d'un solide.

A et B deux points d'un solide S_1 en mouvement par rapport à R_0
Nous avons entre les vitesses de A et de B par rapport à R_0 la relation:

$$\overrightarrow{V_{(B1/0)}} = \overrightarrow{V_{(A1/0)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

en dérivant par rapport au temps on obtient

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V_{(B1/0)}}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{(A1/0)}}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)}{dt}\right]_0$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{V_{(B1/0)}}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{V_{(A1/0)}}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0$$

La dérivation composée nous permet d'écrire

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}$$

or $\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1 = \vec{0}$ Car A et B sont fixes dans le repère lié au solide S_1.

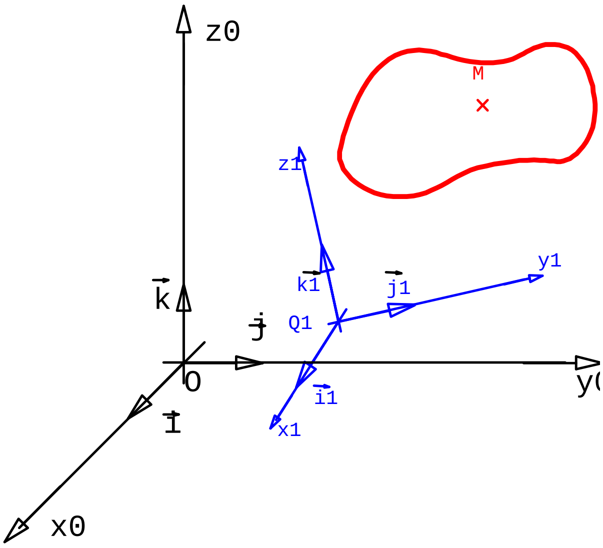
Ainsi la relation entre les vecteurs accélérations de deux points d'un solide s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma_{(B1/0)}} = \overrightarrow{\Gamma_{(A1/0)}} + \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega_{1/0}}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Le champ des vecteurs accélération n'est pas équiprojectif. Ce n'est donc pas le champ des moments d'un torseur.

E. Composition des mouvements de solides indéformables

1. Notation



a) Repères

R0 $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère fixe de référence

R1 $(Q, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ repère mobile par rapport à R0

M un point de S mobile dans R1

b) Définition des mouvements

on appellera

Mouvement absolu: le mouvement de M par rapport à R0

Mouvement relatif: le mouvement de M par rapport à R1

Mouvement d'entraînement: le mouvement de M supposé attaché à R1 par rapport à R0.

par définition

Vitesse absolue	Vitesse relative	Vitesse d'entraînement
$\overrightarrow{V_{(M\in S/0)}} = \left[\dfrac{d\ \overrightarrow{OM}}{dt}\right]_0$	$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}} = \left[\dfrac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_1$	$\overrightarrow{V_{(M\in R_1/R_0)}}$
accélération absolue	accélération relative	accélération d'entraînement
$\overrightarrow{\Gamma_{(M\in S/R_0)}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}}}{dt}\right]_0$	$\overrightarrow{\Gamma_{(M\in S/R_1)}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}}}{dt}\right]_1$	$\overrightarrow{\Gamma_{(M\in R_1/R_0)}}$

2. Compositions des vitesses

$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \left[\frac{d\ \overrightarrow{OM}}{dt}\right]_0 \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{Q_1M}$$

$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \left[\frac{d\ \overrightarrow{OQ_1}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_0 \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(Q_1\in R_1/R_0)}} + \left[\frac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_0$$

la formule de dérivation composée nous donne $\left[\dfrac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_0$

$$\left[\frac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Q_1M} \quad \text{donc :} \overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(Q_1\in R_1/R_0)}} + \left[\frac{d\ \overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Q_1M}$$

$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(Q_1\in R_1/R_0)}} + \overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Q_1M}$$

$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}} + \overrightarrow{V_{(Q_1\in R_1/R_0)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Q_1M}$$

V absolue = V relative + V entraînement
avec pour vitesse d'entraînement:

$$\overrightarrow{V_{(M\in R_1/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(Q_1\in R_1/R_0)}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{Q_1M}$$

3. Généralisation de la formule de composition des vitesses

Soit M appartenant à (S)mobile par rapport à R3 lui même mobile par rapport à R2 , mobile / R2 , mobile /R0.

$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_0)}} = \overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}} + \overrightarrow{V_{(M\in R_1/R_0)}}$$
$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_1)}} = \overrightarrow{V_{(M\in S/R_2)}} + \overrightarrow{V_{(M\in R_2/R_1)}}$$
$$\overrightarrow{V_{(M\in S/R_2)}} = \overrightarrow{V_{(M\in S/R_3)}} + \overrightarrow{V_{(M\in R_3/R_2)}}$$

on déduit des trois égalités

$$\vec{v}_{(M\in S/R_0)} = \vec{v}_{(M\in S/R_3)} + \vec{v}_{(M\in R_3/R_2)} + \vec{v}_{(M\in R_2/R_1)} + \vec{v}_{(M\in R_1/R_0)}$$

4. Composition des Torseurs cinématiques.

Nous avons déjà démontré la relation de composition des vecteurs rotations.(chap. dérivation vectorielle).
Pour un solide S2 en mouvement par rapport à un repère R1 lui même en mouvement par rapport à un repère R0

$$\vec{\Omega}2_{/0} = \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} \; .$$

De la même manière pour tout point de S2 nous avons

$$\vec{v}_{(M\in S_2/R_0)} = \vec{v}_{(M\in S_2/R_1)} + \vec{v}_{(M\in R_1/R_0)}$$

$$\left\{\mathcal{V}_{S2/0}\right\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/0} \\ \vec{v}_{(A2/0)}\end{matrix}\right\}_{R_0} \quad \left\{\mathcal{V}_{S2/1}\right\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{v}_{(A2/1)}\end{matrix}\right\}_{R_0} \quad \left\{\mathcal{V}_{S1/0}\right\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{v}_{(A1/0)}\end{matrix}\right\}_{R_0} \quad \left\{\mathcal{V}_{S2/0}\right\}_A = \left\{\mathcal{V}_{S2/1}\right\}_A + \left\{\mathcal{V}_{S1/0}\right\}_A$$

on a donc

5. Composition des vecteurs accélérations.

Nous avons démontré la relation de composition des vitesses:

$$\vec{v}_{(M\in S/R_0)} = \vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{v}_{(Q_1\in R_1/R_0)} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{Q_1M}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps dans R0.

$$\left[\frac{d\,\vec{v}_{(M\in S/R_0)}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\,\vec{v}_{(M\in S/R_1)}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\,\vec{v}_{(Q_1\in R_1/R_0)}}{dt}\right]_0 + \left[\frac{d\,\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\right]_0 \wedge \vec{Q_1M} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \left[\frac{d\,\vec{Q_1M}}{dt}\right]_0$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{v_{(M\in S/R_0)}}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{\Gamma}_{(M\in S/R_0)} \text{ accélération absolue}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{v}_{(M\in S/R_1)}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\,\vec{v}_{(M\in S/R_1)}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{v}_{(M\in S/R_1)} \text{ dérivation composée de } \vec{v}_{(M\in S/R_1)}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{v}_{(M\in S/R_1)}}{dt}\right]_1 = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_1)} \quad \text{accélération relative}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{v}_{(Q_1\in R_1/R_0)}}{dt}\right]_0 = \vec{\Gamma}_{(Q_1\in R_1/R_0)}$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{Q_1M}}{dt}\right]_1 + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{Q_1M} = \vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{Q_1M}$$

en remplaçant dans la première équation

$$\vec{\Gamma}_{(M\in S/R_0)} = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Gamma}_{(Q_1\in R_1/R_0)} + \left[\frac{d\,\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{Q_1M} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\left(\vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{Q_1M}\right)$$

$$\vec{\Gamma}_{(M\in S/R_0)} = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Gamma}_{(Q_1\in R_1/R_0)} + \left[\frac{d\,\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{Q_1M} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge \Big($$

$$\vec{\Gamma}_{(M\in S/R_0)} = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Gamma}_{(Q_1\in R_1/R_0)} + \left[\frac{d\,\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{Q_1M} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{Q_1M}\right) + 2*\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)}$$

$$\vec{\Gamma}_{(Q_1\in R_1/R_0)} + \left[\frac{d\,\vec{\Omega}_{1/0}}{dt}\right]_0 \wedge \overrightarrow{Q_1M} + \vec{\Omega}_{1/0}\wedge\left(\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{Q_1M}\right) \quad \text{accélération d' entrainement}$$

$$2*\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)} \quad \text{accélération de Coriolis}$$

$$\vec{\Gamma}_{(M\in S/R_0)} = \vec{\Gamma}_{(M\in S/R_1)} + \vec{\Gamma}_{(M_1\in R_1/R_0)} + 2*\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S/R_1)}$$

$$\vec{\Gamma}_{absolue} = \vec{\Gamma}_{relative} + \vec{\Gamma}_{entrainement} + \vec{\Gamma}_{Corriolis}$$

a) cas particuliers

*Si R1 en translation /R0:

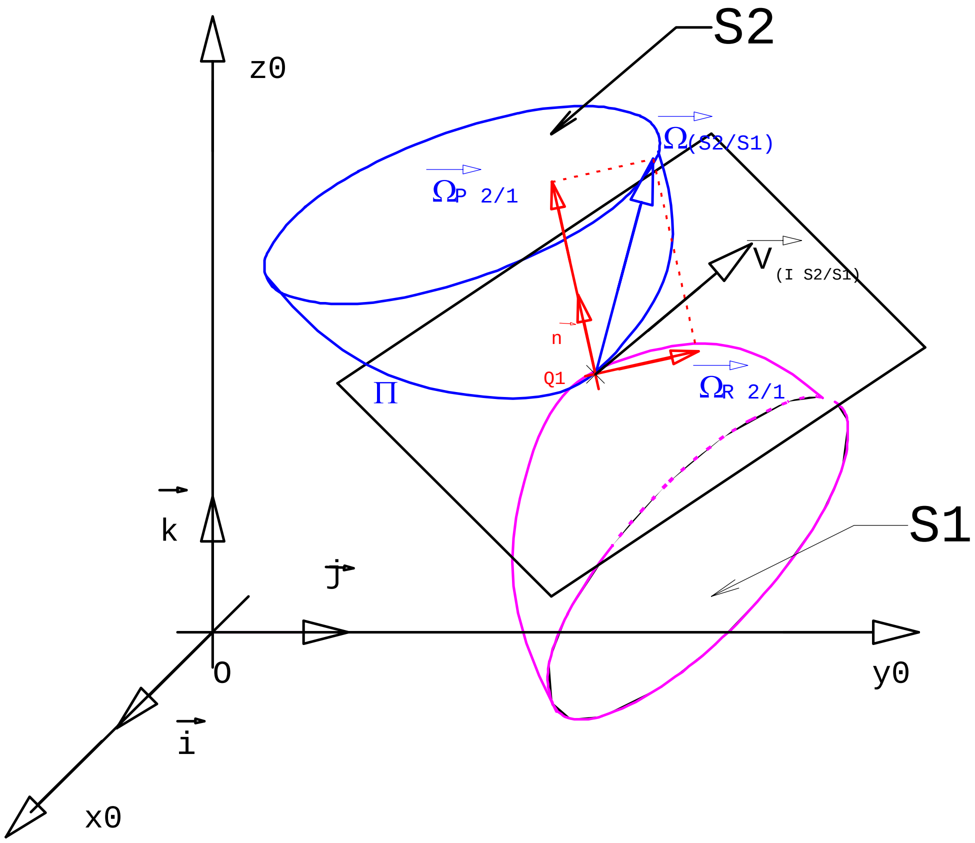
$\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$ alors $\vec{\Gamma}_{Corriolis} = 2*\vec{\Omega}_{1/0}\wedge\vec{v}_{(M\in S_1/R_1)} = \vec{0}$.

*Si $\vec{v}_{(M\in S_1/R_1)} = \vec{0}$ alors $\vec{\Gamma}_{Corriolis} = \vec{0}$.

*Si $\vec{v}_{(M\in S_1/R_1)} // \vec{\Omega}_{1/0}$ alors $\vec{\Gamma}_{Corriolis} = \vec{0}$.

F. Mouvement d'un solide S1 en contact ponctuel avec un S2

Soit deux solides S1 en contact ponctuel avec un S2.



A l'instant t, les deux surfaces frontières Σ1 et Σ2 sont en contact en un point I(t).
En fait à ce point I(t) correspond un point I1 sur la surface Σ1 qui coïncide avec un point I2 sur Σ2.
Le point I(t) est noté I.
On suppose que les deux surfaces admettent un plan tangent commun (Π) en I.
Soit $\vec{n}$ la normale au plan tangent.

Le mouvement de S2/S1 est défini par le torseur cinématique en I $\{V_{S2/S1}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{\Omega}_{S2/S1} \\ \vec{V}_{I \in S2/S1} \end{matrix}\right\}_I$.

1. Roulement et pivotement

Le vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{S2/S1}$ admet des composantes sur la normale au plan tangent et sur le plan (Π).

On appelle la projection sur $\vec{n}$ de $\vec{\Omega}_{S2/S1}$ le **vecteur de pivotement** de S2/S1

$$\vec{\Omega}_{P2/1} = \left(\vec{\Omega}_{S2/S1} \bullet \vec{n}\right)\vec{n}$$

On appelle la projection sur le plan tangent le **vecteur de roulement** de S2/S1.

$$\vec{\Omega}_{R2/1} = \vec{\Omega}_{S2/S1} - \vec{\Omega}_{P2/1}$$

2. Glissement

On appelle vitesse de glissement de S2/S1 : $\vec{V}_{I \in S2/S1}$.

On dit que S2 roule (ou pivote) sans glisser sur S1 si $\vec{V}_{I \in S2/S1} = \vec{0}$.
Le vecteur vitesse de glissement de S2/S1 au point I est parallèle au plan tangent commun à S2 et S1.

$$\vec{V}_{I \in S2/S1} = \vec{V}_{I/S1} - \vec{V}_{I/S2}$$

Or le point I décrit sur Σ1 une courbe C1 et $\vec{V}_{I/S1}$ appartient au plan tangent à la courbe, ici le plan (Π) (par définition de la vitesse de déplacement d'un point). On démontre de même que $\vec{V}_{I/S2}$ appartient au même plan tangent.