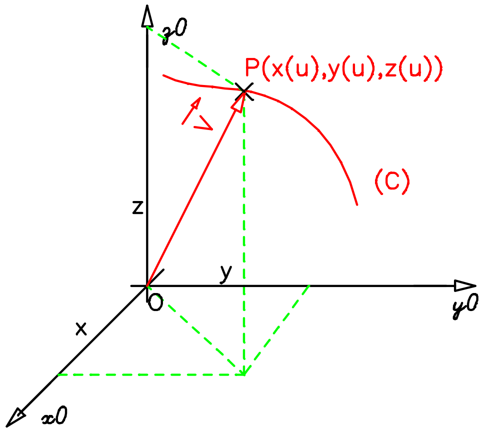
I - DERIVATION VECTORIELLE

A. Dérivée d'un vecteur mobile par rapport à un repère:



Soit $\overrightarrow{V(u)}$ un vecteur quelconque définit dans la base B_0

$\overrightarrow{V(u)} = x(u).\vec{i}_0 + y(u).\vec{j}_0 + z(u).\vec{k}_0$

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{V(u)}$.

Le point P décrit la trajectoire de P dans le repère R_0

Le point P à pour coordonnées x(u), y(u), z(u).

On appelle dérivée du vecteur $\overrightarrow{V(u)}$ par rapport à u relativement à la base B_0 le vecteur noté:

$$\left[\frac{d}{du}\overrightarrow{V(u)}\right]_0 = \frac{dx(u)}{du}.\vec{i}_0 + \frac{dy(u)}{du}.\vec{j}_0 + \frac{dz(u)}{du}.\vec{k}_0 .$$

Si les fonctions x(u), y(u), z(u) admettent des dérivées d'ordre n il est possible de définir le vecteur dérivé d'ordre n

$$\left[\frac{d^n}{du^n}\overrightarrow{V(u)}\right]_0 = \frac{d^n x(u)}{du^n}.\vec{i}_0 + \frac{d^n y(u)}{du^n}.\vec{j}_0 + \frac{d^n z(u)}{du^n}.\vec{k}_0$$

1. Propriétés

Soient $\overrightarrow{V_1(u)}$ et $\overrightarrow{V_2(u)}$ deux vecteurs définis par leurs composantes dans la base B_0

Soient $\lambda_1(u)$ et $\lambda_2(u)$ deux fonctions scalaires de u dérivables

On montre

$$\left[\frac{d\left(\overrightarrow{V_1(u)} + \overrightarrow{V_2(u)}\right)}{du}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\ \overrightarrow{V_1(u)}}{du}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\ \overrightarrow{V_2(u)}}{du}\right]_{R_0}$$

$$\left[\frac{d(\lambda_1(u)\bullet\overrightarrow{V_1(u)} + \lambda_2(u)\bullet\overrightarrow{V_2(u)})}{du}\right]_{R_0} = \lambda_1(u)\bullet\left[\frac{d\ \overrightarrow{V_1(u)}}{du}\right]_{R_0} + \frac{d\lambda_1(u)}{du}\bullet\overrightarrow{V_1(u)} + \lambda_2(u)\bullet\left[\frac{d\ \overrightarrow{V_2(u)}}{du}\right]_{R_0} + \frac{d\lambda_2(u)}{du}\bullet\overrightarrow{V_2(u)}$$

Dérivée du produit scalaire

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{V_1(u)}\bullet\overrightarrow{V_2(u)})}{du}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\ \overrightarrow{V_1(u)}}{du}\right]_{R_0}\bullet\overrightarrow{V_2(u)} + \overrightarrow{V_1(u)}\bullet\left[\frac{d\ \overrightarrow{V_2(u)}}{du}\right]_{R_0}$$

Dérivée du produit Vectoriel

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{V_1(u)}\wedge\overrightarrow{V_2(u)})}{du}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\ \overrightarrow{V_1(u)}}{du}\right]_{R_0}\wedge\overrightarrow{V_2(u)} + \overrightarrow{V_1(u)}\wedge\left[\frac{d\ \overrightarrow{V_2(u)}}{du}\right]_{R_0}$$

2. Cas particuliers

a) Dérivée d'un vecteur $\overrightarrow{V(u)}$ de module constant

Soit $\overrightarrow{V(u)}$ un vecteur fonction de u mis dont le module est constant

$$\overrightarrow{V(u)}^2 = Cte = \overrightarrow{V(u)} \bullet \overrightarrow{V(u)}$$

on a donc

$$\left[\frac{d(\overrightarrow{V(u)} \bullet \overrightarrow{V(u)})}{du}\right]_{R_0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_{R_0} \bullet \overrightarrow{V(u)} + \overrightarrow{V(u)} \bullet \left[\frac{\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_{R_0} = 0$$

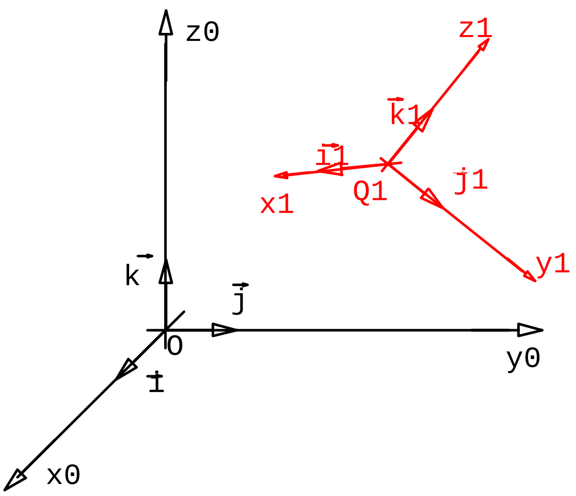
donc :

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_{R_0} \bullet \overrightarrow{V(u)} = 0$$

or les deux vecteurs n'étant pas nuls on en déduit que les deux vecteurs sont **perpendiculaires**.
Le vecteur dérivé d'un vecteur unitaire est donc un vecteur orthogonal à ce vecteur.

B. Vecteur vitesse de rotation d'un repère en mouvement par rapport à un autre repère.

1. dérivation d'une base dans une autre: vecteur rotation.



Soient B_0 et B_1 deux bases orthonormées directes

Les vecteurs unitaires de B_0 sont notées: $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$,.L'origine est notée O

Les vecteurs unitaires de B_1 sont notées: $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$,.L'origine est notée Q1

Les vecteurs unitaires $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$, et l'origine Q1 sont des fonctions de u.

On cherche à exprimer $\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_R$, $\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_R$, $\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_R$

$\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_R$ est un vecteur que l'on peut exprimer dans n'importe quelle base.

Dans la base B_0 les composantes de $\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_R$ sont les dérivées par rapport à u de $\vec{i}_1$ dans B_0. Il est aussi possible de l'exprimer dans la base B_1, ainsi ;

$$\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0} = a(u)\bullet\vec{i}_1 + b(u)\bullet\vec{j}_1 + c(u)\bullet\vec{k}_1$$

$$\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_{R_0} = d(u)\bullet\vec{i}_1 + e(u)\bullet\vec{j}_1 + f(u)\bullet\vec{k}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_{R_0} = g(u)\bullet\vec{i}_1 + h(u)\bullet\vec{j}_1 + l(u)\bullet\vec{k}_1$$

Les vecteurs : $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$, étant unitaires on a:

$\vec{i}_1^{\,2} = 1 \Rightarrow \vec{i}_1\bullet\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ donc $\vec{i}_1$ et $\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0}$ sont orthogonaux donc : a = 0

de même

$\vec{j}_1^{\,2} = 1 \Rightarrow \vec{j}_{11}\bullet\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ par suite e = 0

et

$\vec{k}_1^{\,2} = 1 \Rightarrow \vec{k}_1\bullet\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ par suite l = 0

les vecteurs : $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, $\vec{k}_1$, sont orthogonaux deux à deux

$\vec{i}_1\cdot\vec{j}_1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0}\bullet\vec{j}_1 + \vec{i}_1\bullet\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ on a donc b = -d

$\vec{i}_1 . \vec{k}_1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0}\bullet\vec{k}_1 + \vec{i}_1\bullet\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ on a donc c = -g

$\vec{j}_1 . \vec{k}_1 = 0 \Rightarrow \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_{R_0}\bullet\vec{k}_1 + \vec{j}_1\bullet\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_{R_0} = 0$ on a donc f = -h

on pose habituellement

b = -d = r
-c = g = q
f = -h = p

on appelle Vecteur rotation de B_1/B_0 le vecteur noté

$$\overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = p\cdot\vec{i}_1 + q\cdot\vec{j}_1 + r\cdot\vec{k}_1$$

d'où les expressions de $\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_R$, $\left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_R$, $\left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_R$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

$$\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0} = r\bullet\vec{j_1} - q\bullet\vec{k_1} \qquad \left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{i_1}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{j_1}}{du}\right]_{R_0} = -r\bullet\vec{i_1} + p\bullet\vec{k_1} \quad \text{on constate que} \quad \left[\frac{d\,\vec{j_1}}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{j_1}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_{R_0} = q\bullet\vec{i_1} - p\bullet\vec{j_1} \qquad \left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{k_1}$$

2. Détermination du vecteur rotation

a) cas général

$$\vec{i_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0} = \vec{i_1}\wedge\left[\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\vec{i_1}\right] = \vec{i_1}^{\,2}\bullet\overrightarrow{\Omega_{1/0}} - \left(\vec{i_1}\bullet\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)\bullet\vec{i_1} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} - \left(\vec{i_1}\bullet\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right)\bullet\vec{i_1}$$

d'où

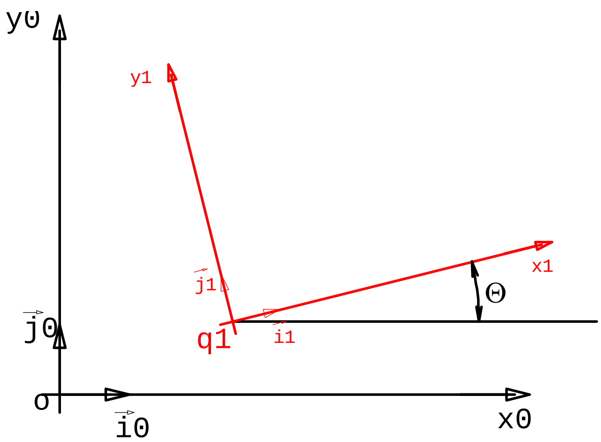
$$\vec{i_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0} = \mathrm{q}\bullet\vec{j_1} + r\bullet\vec{k_1}\,,\quad \vec{j_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{j_1}}{du}\right]_{R_0} = p\bullet\vec{i_1} + r\bullet\vec{k_1} \quad \text{et}$$

$$\vec{k_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_{R_0} = p\bullet\vec{i_1} + \mathrm{q}\bullet\vec{j_1}$$

on à donc en additionnant les trois relations membre à membre

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{1}{2}\left(\vec{i_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0} + \vec{j_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{j_1}}{du}\right]_{R_0} + \vec{k_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_{R_0}\right)$$

b) Cas particulier d'un repère ayant une direction fixe par rapport au repère de référence:



Rotation plane de deux bases une par rapport à l'autre.
θ est un fonction de u
on a

$$\vec{i_1} = \cos(\theta(u))\bullet\vec{i_0} + \sin(\theta(u))\bullet\vec{j_0}$$

en simplifiant la notation

$$\vec{i_1} = \cos\theta\bullet\vec{i_0} + \sin\theta\bullet\vec{j_0}$$

et

$$\vec{j_1} = -\sin\theta\bullet\vec{i_0} + \cos\theta\bullet\vec{j_0}$$

$$\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_0 = -\frac{d\theta}{du}\bullet\sin\theta\bullet\vec{i_0}+\frac{d\theta}{du}\bullet\cos\theta\bullet\vec{j_0}$$

$$\left[\frac{d\vec{j_1}}{du}\right]_0 = -\frac{d\theta}{du}\bullet\cos\theta\bullet\vec{i_0}+-\frac{d\theta}{du}\bullet\sin\theta\bullet\vec{j_0}$$

$\vec{k_1}=\vec{k_0}$ donc $\left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_0=\vec{0}$

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{1}{2}\left(\vec{i_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{i_1}}{du}\right]_{R_0}+\vec{j_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{j_1}}{du}\right]_{R_0}+\vec{k_1}\wedge\left[\frac{d\,\vec{k_1}}{du}\right]_{R_0}\right)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{1}{2}\left(\left(\cos\theta\bullet\vec{i_0}+\sin\theta\bullet\vec{j_0}\right)\wedge\left(-\frac{d\theta}{du}\bullet\sin\theta\bullet\vec{i_0}+\frac{d\theta}{du}\bullet\cos\theta\bullet\vec{j_0}\right)\right.$$
$$\left.+\left(-\sin\theta\bullet\vec{i_0}+\cos\theta\bullet\vec{j_0}\right)\wedge\left(-\frac{d\theta}{du}\bullet\cos\theta\bullet\vec{i_0}+-\frac{d\theta}{du}\bullet\sin\theta\bullet\vec{j_0}\right)\right)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{du}\bullet\cos^2\theta+\frac{d\theta}{du}\bullet\sin^2\theta+\frac{d\theta}{du}\bullet\cos^2\theta+\frac{d\theta}{du}\bullet\sin^2\theta\right)\bullet\vec{k_0}$$

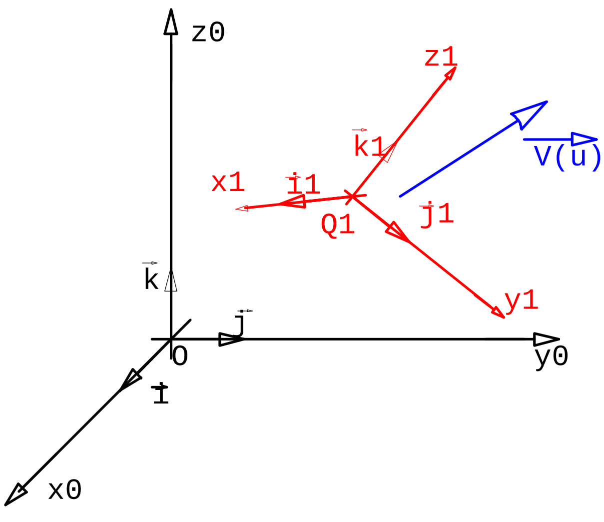
Le vecteur rotation d'une base par rapport en une autre en rotation plane est porté par l'axe autour duquel s'effectue la rotation : $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \frac{d\theta}{du}\bullet\vec{k_0}$

C. Dérivation composée d'un vecteur mobile par rapport à deux repères:

$\overrightarrow{V(u)}$, un vecteur fonction de la variable u, on connaît l'expressions de ce vecteur dans la base R1

$\overrightarrow{V(u)} = x(u).\vec{i_1}+y(u)\,\vec{j_1}+z(u).\vec{k_1}$

On recherche une relation entre $\left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1$ et $\left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0$



on sait par définition que

$$\left[\frac{d}{du}\overrightarrow{V(u)}\right]_1 = \frac{dx(u)}{du}.\vec{i_1}+\frac{dy(u)}{du}.\vec{j_1}+\frac{dz(u)}{du}.\vec{k_1}$$

de même (d'après les propriétés)

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\left(x(u).\vec{i_1}+y(u).\vec{j_1}+z(u).\vec{k_1}\right)}{du}\right]_0$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \frac{dx(u)}{du}.\vec{i}_1 + x(u).\left[\frac{d\vec{i}_1}{du}\right]_0 + \frac{dy(u)}{du}.\vec{j}_1 + y(u).\left[\frac{d\vec{j}_1}{du}\right]_0 + \frac{dz(u)}{do}.\vec{k}_1 + z(u).\left[\frac{d\vec{k}_1}{du}\right]_0$$

A partir de la relation précédente et de la définition du vecteur rotation

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \frac{dx(u)}{du}.\vec{i}_1 + \frac{dy(u)}{du}.\vec{j}_1 + \frac{dz(u)}{do}.\vec{k}_1 + x(u).\left[\frac{d\vec{i}_1}{du}\right]_0 + y(u).\left[\frac{d\vec{j}_1}{du}\right]_0 + z(u).\left[\frac{d\vec{k}_1}{du}\right]_0$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 + x(u).\left[\frac{d\vec{i}_1}{du}\right]_0 + y(u).\left[\frac{d\vec{j}_1}{du}\right]_0 + z(u).\left[\frac{d\vec{k}_1}{du}\right]_0$$

Les dérivées des vecteurs d'une base R1 par rapport à une base R0 sont connues.

$$\left[\frac{d\,\vec{i}_1}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{i}_1 \;,\; \left[\frac{d\,\vec{j}_1}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{j}_1 \;, \text{ et } \left[\frac{d\,\vec{k}_1}{du}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{k}_1$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 + x(u).\,\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{i}_1 + y(u).\,\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{j}_1 + z(u)\,\overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{k}_1$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \left(x(u).\vec{i} + y(u).\vec{j}_1 + z(u).\vec{k}_1\right)$$

D'où la relation

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V(u)}$$

1. cas particuliers

* Si $\overrightarrow{V(u)}$ est un vecteur constant de R1, x1, y1, z1 sont des constantes qui ne dépendent pas de u

donc: $\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V(u)}$

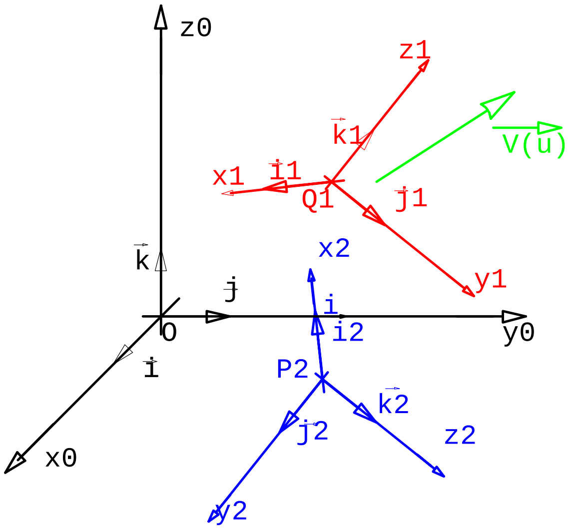
* Si R1 est en translation par rapport à R0 alors $\overrightarrow{\Omega}(1_{/0}) = \vec{0}$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1$$

D. Composition des vecteurs vitesse de rotation

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{V(u)}$$

$$\left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_1 = \left[\frac{d\,\overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{V(u)}$$



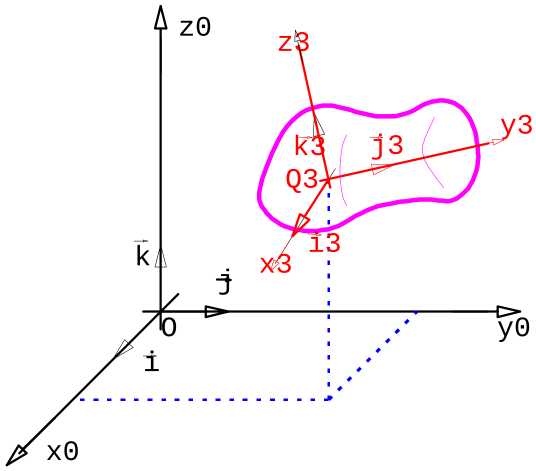
$$\left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_2 + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{V(u)}$$

On peut déduire des deux premières égalités

$$\left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_0 = \left[\frac{d\ \overrightarrow{V(u)}}{du}\right]_2 + \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \wedge \overrightarrow{V(u)}$$

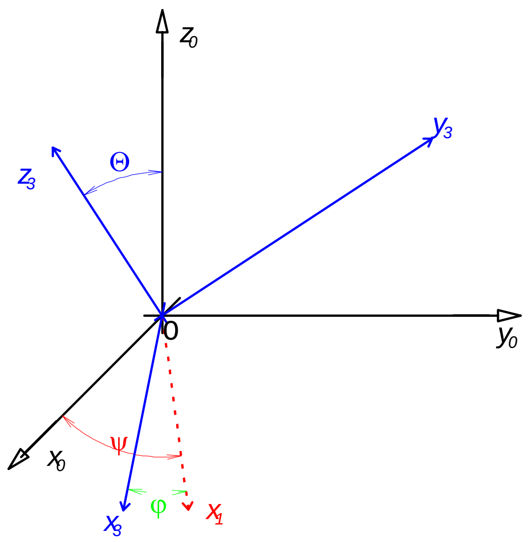
D'où la relation entre les vecteurs rotations $\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

1. Application: angles d'Euler.



Un solide dans l'espace peut être positionné par 3 translations et trois rotations.
Pour positionner ce solide on lui associe un repère.
Les trois translations peuvent être caractérisés par les coordonnées de l'origine du repère
Les trois rotations par trois angles.
Le choix le plus courant est celui des angles d'Euler.

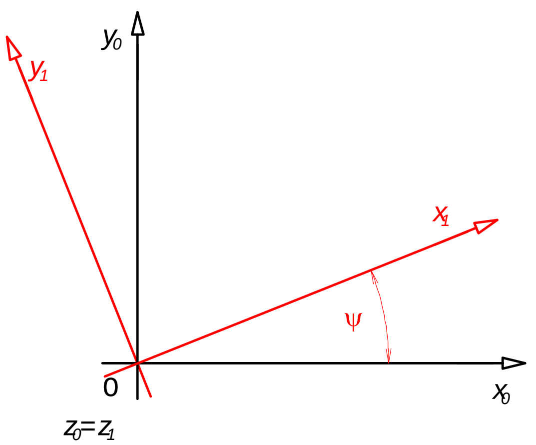
a) Détermination des angles d'Euler.



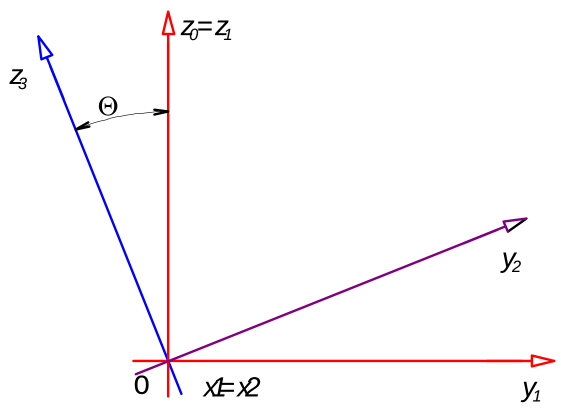
On défini, O,x1= "ligne des noeuds", l'intersection du plan (x0,0,y0) et (x3,0,y3) on pose

$\left(\vec{x}_0, \vec{x}_1\right) = \psi$ **angle de précession**.

Cet angle permet de positionner la trace du plan (x3,0,y3) dans le plan (x0,0,y0)



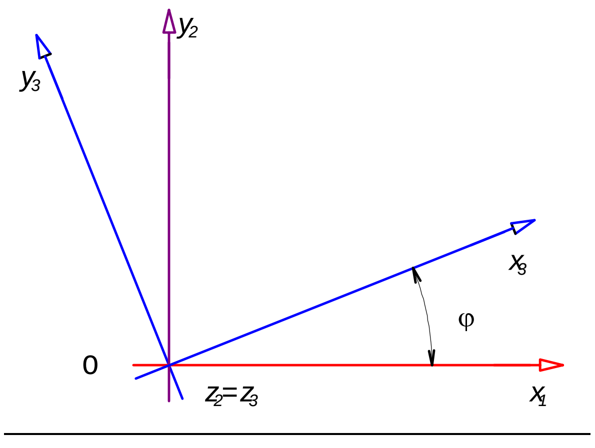
On définit le repère R1 (O, x1, y1, z1) avec z1=z0 et y1 pour que le repère soit orthonormé.
L'axe Oz3 se trouve dans le plan perpendiculaire à Ox1 passant par O. Ce plan contient Oy1 et Oz1=Oz0



on pose

$\left(\vec{z}_1, \vec{z}_3\right) = \theta$: **angle de nutation**

On définit l'axe Oy2 à partir de Oz3 par une rotation de $-\dfrac{\pi}{2}$ autour de Ox1 et Ox2=Ox1 d'où la base intermédiaire R2 (O, x1, y2, z3)



On se place ensuite dans le plan passant par O perpendiculaire à z3
Ce plan contient les axes x1= x2, y2 et y3
on pose
$\left(\vec{x}_1, \vec{x}_3\right) = \varphi$ **angle de rotation propre**

Les trois angles ψ, θ et φ permettent de positionner de manière unique le repère R3 par rapport au repère R1. Le passage d'un repère à un autre peut se faire par trois rotations planes.

b) Vecteur Rotation $\vec{\Omega}_{3/0}$

$\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \varphi' \bullet \vec{k}_3$ avec $\overrightarrow{\Omega_{3/2}}$ rotation d'axe $\left(O, \vec{z}_3\right)$

$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \theta' \bullet \vec{i}_1$ avec $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ rotation d'axe Ox1

$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \psi' \bullet \vec{k}_0$ avec $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ rotation autour de $\left(O, \vec{z}_1\right)$

d'où la relation :

$\overrightarrow{\Omega_{3/2}} = \varphi' \bullet \vec{k}_3 + \theta' \bullet \vec{i}_1 + \psi' \bullet \vec{k}_0$

:avec φ', θ', ψ' dérivée des angles de rotation par rapport à la variable étudiée.