Système du second ordre
a>1
Recherche de la réponse à un échelon unitaire.

Michel Huguet

Préambule :

La forme canonique d'un système du second ordre est de la forme :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}$$

Le système étant sollicité par un échelon unitaire de type $e(t)=1\cdot u(t)$, l'image de cette entrée dans le domaine de Laplace est notée E(p) et vaut : $E(p)=\frac{1}{p}$. L'image de la réponse du système notée S(p) vaut alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} S(p)=H(p)\cdot E(p) \\ S(p)=\dfrac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}\cdot\dfrac{1}{p}\end{array}}$$

1) Décomposition de S(p) en éléments simples :

1.1)Recherche des racines de $1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2=0$. Pour a>1 on trouve deux racines réelles :

$$p_1=-a\cdot\omega_n-\omega_n\cdot\sqrt{a^2-1}$$
$$p_2=-a\cdot\omega_n+\omega_n\cdot\sqrt{a^2-1}$$

Une fois factorisée l'équation se met sous la forme : $\frac{1}{\omega_n^2}\cdot(p-p_1)\cdot(p-p_2)=0$

Donc S(p) peut se mettre sous la forme :

$$S(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot(p-p_1)\cdot(p-p_2)}\cdot\frac{1}{p}\quad\text{ou}\quad S(p)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{p\cdot(p-p_1)\cdot(p-p_2)}$$

En posant : $\tau_1=-\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2=-\frac{1}{p_2}$ S(p) s'écrit :

$$S(p)=\frac{\frac{K\cdot\omega_n^2}{p_1\cdot p_2}}{p\cdot(-\frac{p}{p_1}+1)\cdot(-\frac{p}{p_2}+1)}$$

or le produit $p_1\cdot p_2=\omega_n^2$, donc S(p) prend la forme « habituelle » :

$$\boxed{S(p)=\frac{K}{p\cdot(1+\tau_1\cdot p)\cdot(1+\tau_2\cdot p)}}$$

ou τ_1 et τ_2 sont appelées constantes de temps du système.

1.2) Recherche des coefficients :

$$S(p)=\frac{K}{p\cdot(1+\tau_1\cdot p)\cdot(1+\tau_2\cdot p)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+\tau_1\cdot p}+\frac{C}{1+\tau_2\cdot p}$$

*Recherche de A : On forme $p \cdot S(p)$ et on pose p=0

$$p \cdot S(p) = \frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)}$$ et en posant p=0 on obtient $A = K$

* Recherche de B : On forme $(1+\tau_1 \cdot p)\cdot S(p)$ et on pose $p = -\frac{1}{\tau_1}$

$$(1+\tau_1 \cdot p)\cdot S(p) = \frac{K}{p\cdot(1+\tau_2 \cdot p)}$$ et en posant $p = -\frac{1}{\tau_1}$ on obtient :

$$B = \frac{K}{-\frac{1}{\tau_1}\cdot\left(1-\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)} \Rightarrow B = \frac{K}{-\frac{1}{\tau_1}+\frac{\tau_2}{\tau_1^2}}$$ Finalement on obtient $B = \frac{K\cdot\tau_1^2}{\tau_2-\tau_1}$

* Recherche de C : On forme $(1+\tau_2 \cdot p)\cdot S(p)$ et on pose $p = -\frac{1}{\tau_2}$

De la même manière on obtient : $C = \frac{K\cdot\tau_2^2}{\tau_1-\tau_2}$

Finalement il vient :

$$S(p) = \frac{K}{p\cdot(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)}$$

$$S(p) = K\left(\frac{1}{p}+\frac{\tau_1^2}{\tau_2-\tau_1}\cdot\frac{1}{1+\tau_1\cdot p}+\frac{\tau_2^2}{\tau_1-\tau_2}\cdot\frac{1}{1+\tau_2\cdot p}\right)$$

$$S(p) = K\left(\frac{1}{p}+\frac{\tau_1^2}{\tau_2-\tau_1}\cdot\frac{\frac{1}{\tau_1}}{\frac{1}{\tau_1}+p}+\frac{\tau_2^2}{\tau_1-\tau_2}\cdot\frac{\frac{1}{\tau_2}}{\frac{1}{\tau_2}+p}\right)$$

$$S(p) = K\left(\frac{1}{p}+\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\tau_1}+p}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\tau_2}+p}\right)$$

2) Transformation inverse :

La transformation inverse de S(p) donne s(t) qui est égale à :

$$s(t) = K\cdot\left(1+\frac{\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

$$s(t) = K\cdot\left(1+\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\tau_1\cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2\cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)$$