Système du second ordre
a<1
Recherche de la réponse à un échelon unitaire.

Michel Huguet

Préambule :

La forme canonique d'un système du second ordre est de la forme :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}$$

Le système étant sollicité par un échelon unitaire de type $e(t)=1\cdot u(t)$, l'image de cette entrée dans le domaine de Laplace est notée E(p) et vaut : $E(p)=\frac{1}{p}$. L'image de la réponse du système notée S(p) vaut alors :

$$\boxed{\begin{aligned}&S(p)=H(p)\cdot E(p)\\&S(p)=\frac{K}{1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2}\cdot\frac{1}{p}\end{aligned}}$$

1) Décomposition de S(p) en éléments simples :

1.1)Recherche des racines de $1+\frac{2\cdot a}{\omega_n}\cdot p+\frac{1}{\omega_n^2}\cdot p^2=0$. Pour a<1 on trouve deux racines complexes :

$$p_1=-a\cdot\omega_n+j\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}$$
$$p_2=-a\cdot\omega_n-j\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}$$

Une fois factorisée l'équation se met sous la forme : $\frac{1}{\omega_n^2}\cdot(p-p_1)\cdot(p-p_2)=0$

Ou $\frac{1}{\omega_n^2}\cdot\left(p+a\cdot\omega_n-j\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)\cdot\left(p+a\cdot\omega_n+j\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)=0$

En développant on trouve :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\cdot\left(p^2+2\cdot a\cdot\omega_n\cdot p+a^2\cdot\omega_n^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)=0$$

$$\frac{1}{\omega_n^2}\cdot\left(\left(p+a\cdot\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)=0$$

finalement on met S(p) sous la forme :

$$S(p)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}\cdot\left(\left(p+a\cdot\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)}\cdot\frac{1}{p}$$

$$S(p)=\frac{K\cdot\omega_n^2}{\left(\left(p+a\cdot\omega_n\right)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)}\cdot\frac{1}{p}$$

Qui après mise en forme , s'écrit :

$$\boxed{S(p)=\frac{K\cdot\omega_n}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{p}}$$

Pour la suite on posera : $S(p)=\frac{K\cdot\omega_n}{\sqrt{1-a^2}}\cdot S_1(p)$

1.2)Décomposition de $S_1(p)$:

$$S_1(p)=\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{p}=\frac{A}{p}+\frac{B\cdot(p+a\cdot\omega_n)+C}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}$$

- Recherche de A :
  On forme :

$$p\cdot S_1(p)=\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}=p\cdot\frac{A}{p}+p\cdot\frac{B\cdot(p+a\cdot\omega_n)+C}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}$$

Et on pose p = 0 , il vient alors :

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}=A\Leftrightarrow\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{a^2\cdot\omega_n{}^2+\omega_n^2\cdot(1-a^2)}=A$$

Finalement :

$$\boxed{A=\frac{\sqrt{1-a^2}}{\omega_n}}$$

- Recherche de B et de C :
  On forme :

$$\left((p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)\cdot S_1(p)$$

Il vient :

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{p}=\left((p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)\cdot\frac{A}{p}+\left((p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2\right)\cdot\frac{B\cdot(p+a\cdot\omega_n)+C}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}$$

Et on pose $p=p_1$ ou $p=p_2$:

$$p=p_2$$

$$p_2=-\omega_n\left(a+j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)$$

Il vient alors :

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{-\omega_n\cdot\left(a+j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)}=B\cdot\left(-\omega_n\cdot\left(a+j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)+a\cdot\omega_n\right)+C$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur due premier terme de l'égalité par le complexe conjugué, on peut écrire :

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{\omega_n^2}\cdot\left(-\omega_n\cdot\left(a-j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)\right)=B\cdot\left(-\omega_n\cdot\left(a+j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)+a\cdot\omega_n\right)+C$$

$$-\sqrt{1-a^2}\cdot\left(a-j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)=-j\cdot B\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}+C$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on obtient le système :

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{\omega_n^2}\cdot\left(-\omega_n\cdot\left(a-j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)\right)=B\cdot\left(-\omega_n\cdot\left(a+j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)+a\cdot\omega_n\right)+C$$

$$-\sqrt{1-a^2}\cdot\left(a-j\cdot\sqrt{1-a^2}\right)=-j\cdot B\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}+C$$

$$\begin{cases} -a\cdot\sqrt{1-a^2}=C \\ 1-a^2=-B\cdot\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -a\cdot\sqrt{1-a^2}=C \\ -\dfrac{1-a^2}{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}=B \end{cases}$$

Finalement on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} C=-a\cdot\sqrt{1-a^2} \\ B=-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\omega_n} \end{cases}}$$

Donc S(p) décomposée s'écrit :

$$S(p)=\frac{K\cdot\omega_n}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{\omega_n}\cdot\frac{1}{p}-\frac{-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\omega_n}\cdot(p+a\cdot\omega_n)}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}-\frac{a\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}\right)$$

Après simplification on obtient :

$$\boxed{S(p)=K\cdot\left(\frac{1}{p}-\frac{(p+a\cdot\omega_n)}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}\right)}$$

2) Transformée inverse :

En posant : $\alpha=a\cdot\omega_n$ et $\omega=\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}$:

$$\frac{(p+a\cdot\omega_n)}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}=\frac{(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad L^{-1}\left(\frac{(p+\alpha)}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\right)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

$$\frac{\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}}{(p+a\cdot\omega_n)^2+\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\right)^2}=\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2} \quad \text{et} \quad L^{-1}\left(\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}\right)=e^{-\alpha\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)$$

Finalement on obtient après transformation inverse :

$$L^{-1}(S(p))=s(t)=K\cdot\left(1-e^{-\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t}\cdot\cos\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)-\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\cdot e^{-\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t}\cdot\sin\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)\right)$$

$$s(t)=K\cdot\left(1-\frac{e^{-\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t}}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\sqrt{1-a^2}\cdot\cos\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)+a\cdot\sin\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)\right)\right)$$

En posant : $\cos\varphi=a$ et $\sin\varphi=\sqrt{1-a^2}$ on peut écrire :

$$s(t)=K\cdot\left(1-\frac{e^{-\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t}}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\sin\varphi\cdot\cos\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)+\cos\varphi\cdot\sin\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t\right)\right)\right)$$

soit :

$$\boxed{s(t)=K\cdot\left(1-\frac{e^{-\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t}}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\sin\left(\omega_n\cdot\sqrt{1-a^2}\cdot t+\varphi\right)\right) \quad \text{avec } \varphi=Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)}$$