Chapitre 3

Modélisation des systèmes linéaires et asservis

3.1 Systèmes linéaires continus invariants

Définition : Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants [1]. Les systèmes linéaires possèdent principalement deux propriétés :

— la proportionnalité ;

— l'additivité.

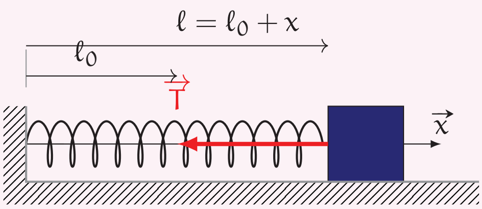
Les deux exemples ci-dessous montrent comment établir l'équation différentielle du mouvement d'une masse oscillante.

3.1.1 Exemples

Exemple guidé : Oscillateur harmonique horizontal

L'oscillateur harmonique est constitué d'une masse en translation et d'un ressort. Elle repose sur une surface table pneumatique afin de limiter les frottements. La masse est écartée de sa position de repos et lâchée.

Nous considérerons que le contact entre la masse et le support est parfait (pas de frottements).



Pour établir l'équation qui décrit le mouvement, nous allons appliquer la deuxième loi de Newton (principe fondamental de la dynamique en translation).

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{p_{S/\mathcal{R}_g}}\right]_{\mathcal{R}_g} = M \cdot \overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$$

avec $\overrightarrow{a_{S/\mathcal{R}_g}}$ l'accélération du solide par rapport au référentiel galiléen.

Inventaire des actions mécaniques extérieures :

— le poids : $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{z}$;

— la réaction du support $\vec{R} = R \cdot \vec{z}$;

— l'action du ressort $\vec{T_x} = T_x \cdot \vec{x}$.

La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot (\ell - \ell_0)$$

1. Les équations différentielles seront abordées dans la suite du cours et approfondies en mathématiques.

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Cette équation est une équation différentielle incomplète du second ordre, il manque le terme en $\dot{x}(t)$. On obtient la solution de cette équation différentielle en posant : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

Il est facile de montrer qu'elle est de la forme :

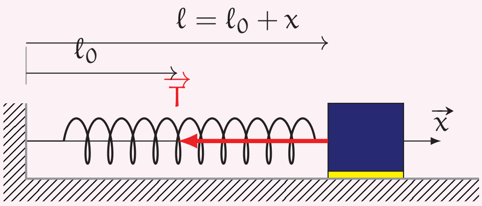
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \phi)$$

par substitution dans l'équation différentielle. Les deux constantes A et ϕ sont déterminées en fonction des conditions initiales.

Un exemple légèrement plus complexe.

Exemple guidé : Oscillateur harmonique horizontal avec frottements fluides

L'hypothèse « sans frottements » est peu réaliste. Afin de les limiter, on intercale entre la masse et le support, un lubrifiant (huile). L'effet de l'huile n'est pas négligeable, les frottements ne sont pas nuls et dépendent de la vitesse de déplacement de la masse par rapport au sol et s'opposent à celle-ci :



$$\vec{F_h} = -\mu \cdot v(t) \cdot \vec{x}$$

L'inventaire des actions mécaniques extérieures devient :

- le poids : $\vec{P} = -M \cdot g \cdot \vec{z}$;
- la réaction du support : $\vec{R} = R \cdot \vec{z}$;
- l'action du ressort : $\vec{T_x} = T_x \cdot \vec{x}$;
- les frottements : $\vec{F_h} = -\mu \cdot v(t) \cdot \vec{x} = -\mu \cdot \dot{x}(t) \cdot \vec{x}$.

La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$F_h + T_x = m \cdot \ddot{x}(t) \quad \text{avec} \quad T_x = -K \cdot x(t)$$

On obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + \mu \cdot \dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$$
$$m \cdot \frac{d^2\,x(t)}{dt^2} + \mu \cdot \frac{d\,x(t)}{dt} + K \cdot x(t) = 0$$

On reconnaît encore une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Nous montrerons plus loin que la solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = A_1 \cdot \exp(B_1 \cdot t) + A_2 \cdot \exp(B_2 \cdot t)$$

En définitive, étudier un système linéaire revient à étudier la solution de l'équation différentielle à coefficients constants.

3.2 Propriétés des SLCI

3.2.1 Principe de proportionnalité

Définition : Si $y(t)$ est la réponse à l'entrée $x(t)$ alors $\lambda \cdot y(t)$ est la réponse à $\lambda \cdot x(t)$.

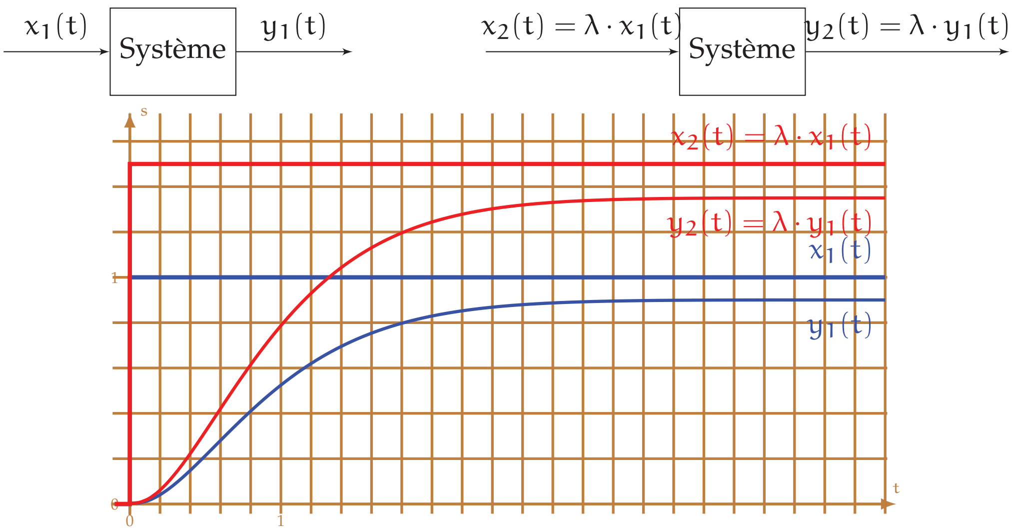
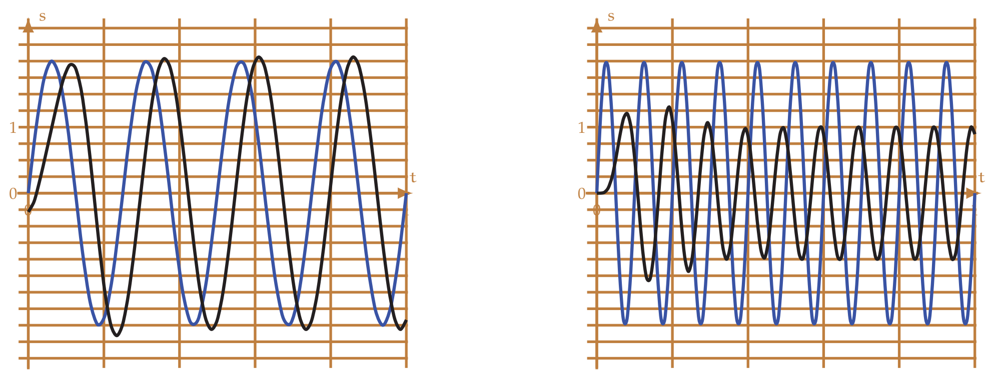


FIGURE 3.1 – Proportionnalité

Dans un système linéaire, l'effet est proportionnel à la cause (figure 3.1). L'effet de proportionnalité n'est effectif que lorsque le système a atteint sa position d'équilibre ou que le régime permanent s'est établi.

La caractéristique entrée/sortie d'un système linéaire est une droite dont la pente est appelée gain du système.



(a) $f = 4\,\text{Hz}$ (b) $f = 10\,\text{Hz}$

FIGURE 3.2 – Comportement en régime permanent

La réponse, en régime définitif (en régime permanent) d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Sur la figure 3.2 on constate que la réponse en régime établi à une entrée sinusoïdale de fréquence f est aussi une sinusoïde de même fréquence mais déphasée et avec une amplitude différente.

3.2.2 Additivité - Principe de superposition

Définition : Si $y_1(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t)$ et $y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_2(t)$ alors, $y_1(t) + y_2(t)$ est la réponse à l'entrée $x_1(t) + x_2(t)$ (figure 3.3).

Les principes de proportionnalité et de superposition vont nous permettre, connaissant la réponse d'un système à des sollicitations simples de déterminer par additivité et proportionnalité la réponse à des sollicitations plus complexes.

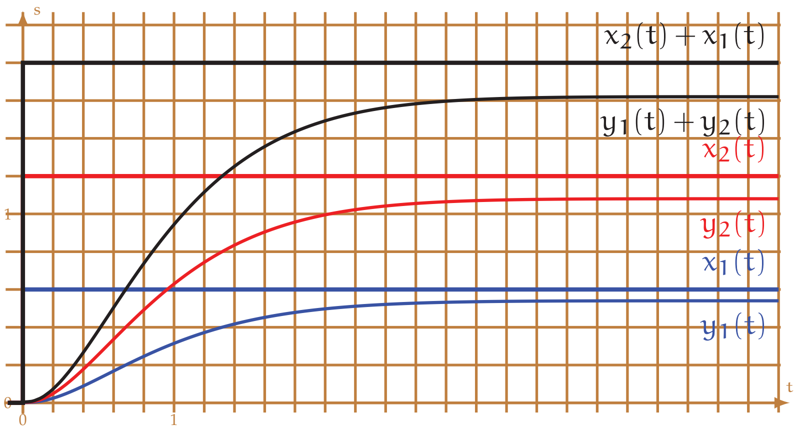


FIGURE 3.3 – Principe de superposition

3.2.3 Systèmes continus

Un système est dit continu lorsque les grandeurs physiques qui le caractérisent, évoluent de manière continue en fonction du temps.

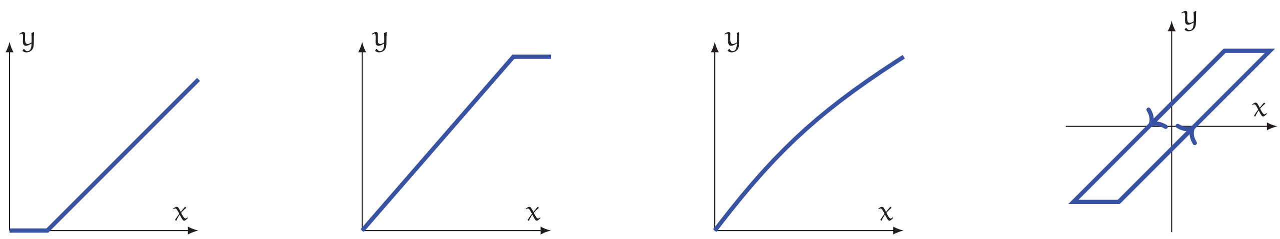
On oppose les systèmes continus aux systèmes discrets et aux systèmes numériques pour lesquels l'évolution d'un état à un autre se fait par « saut » d'une valeur à la suivante.

3.2.4 Systèmes invariants

On dit qu'un système est invariant lorsque les caractéristiques du système ne se modifient pas dans le temps.

3.3 Principales non-linéarités

Les systèmes réels ne sont ni linéaires, ni continus, ni invariants. Il est en général souvent possible de modéliser correctement le système afin que celui-ci puisse être considéré comme linéaire, continu et invariant dans la zone d'étude.



(a) seuil (b) saturation (c) courbure (d) hystérésis

FIGURE 3.4 – Non-linéarités

Seuil : Un système présente un seuil si la sortie n'évolue que lorsque l'entrée dépasse une valeur minimale (seuil). Les seuils ont souvent pour origine des frottements secs.

Saturation : Un système présente une saturation lorsque la sortie n'évolue plus au-delà d'une valeur limite.

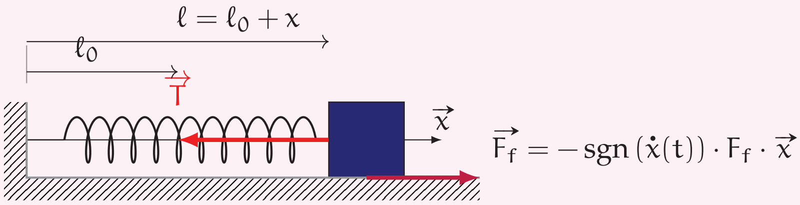
Ces saturations sont dues soit aux limites mécaniques du système (butées) soit aux limites des interfaces de puissance (saturation des amplificateurs opérationnels).

Courbure : La quasi-totalité des systèmes présente des courbures plus ou moins prononcées.

Dans la plupart des cas le système est approché par une droite passant par l'origine, mais il est aussi possible de linéariser autour d'un point de fonctionnement.

Hystérésis : Un système présente une réponse avec une hystérésis lorsque le comportement est différent suivant le sens d'évolution de la variable d'entrée.

Exemple guidé : Oscillateur harmonique horizontal avec frottement sec



La deuxième loi de Newton en projection sur l'axe $(O, \vec{x})$ s'écrit :

$$-K \cdot x(t) - \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) \cdot F_f = m \cdot \ddot{x}(t)$$

soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) > 0 : m \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = -F_f \\ \dot{x}(t) < 0 : m \cdot \ddot{x}(t) + K \cdot x(t) = +F_f \end{cases}$$

Le système est décrit par deux équations différentielles en fonction du sens de déplacement.

Pour que la masse se déplace sous l'action du ressort, il est nécessaire que celui-ci développe un effort supérieur à celui des frottements. Il y a un seuil minimum à franchir pour que le mouvement débute et le comportement est différent suivant le sens de déplacement.

3.4 Étude des systèmes linéaires

L'étude et la caractérisation des systèmes linéaires ne passent pas obligatoirement par la résolution de l'équation différentielle surtout qu'il n'est pas toujours possible de résoudre celle-ci.

Nous allons voir dans un premier temps les principes de la résolution des équations différentielles avec les outils mathématiques classiques puis en utilisant la **transformation de Laplace** qui permet de travailler dans un espace dans lequel les équations différentielles sont représentées par des polynômes.

3.5 Description par les équations différentielles

Un système dynamique linéaire peut être décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

L'équation générale d'un système linéaire est de la forme :

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\,x(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t)$$

On note :

$\frac{d\,y(t)}{dt} = \dot{y}(t)$	dérivée 1re de $y(t)$ par rapport au temps
$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \ddot{y}(t)$	dérivée 2de de $y(t)$ par rapport au temps
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	dérivée nème de $y(t)$ par rapport au temps

Pour les systèmes réels, $m \geqslant n$ (principe de causalité[2]).

À partir de cette représentation il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la sortie en résolvant l'équation différentielle.

3.5.1 Principe de résolution

Nous n'allons pas ici faire un cours de mathématiques[3], mais uniquement montrer les principes de la résolution dans des exemples simples.

On considère deux formes d'équations différentielles à coefficients constants, les équations sans second membre, et celles avec second membre.

Équation sans second membre : un des termes de l'égalité est nul.

$$a \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\,s(t)}{dt} + c \cdot s(t) = 0$$

Équation avec second membre :

$$a \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\,s(t)}{dt} + c \cdot s(t) = e(t)$$

Résoudre une équation avec second membre commence par résoudre une équation sans second membre que l'on complète par la recherche d'une solution particulière.

a) Équation différentielle du premier ordre sans second membre

Pour une équation différentielle du 1er ordre,

$$\tau \cdot \frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = 0$$

La solution est de la forme :

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec A une constante déterminée en fonction des conditions initiales.

2. La cause précède toujours l'effet.
3. L'étude complète de la résolution des équations différentielles sera vue en mathématiques

On vérifie rapidement en remplaçant dans l'équation différentielle.

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\dot{s}(t) = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

b) Équation du second ordre sans second membre

Soit l'équation différentielle :

$$a \cdot \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{d\, s(t)}{dt} + c \cdot s(t) = 0$$

avec a, b et c des réels.

Montrons qu'une solution est de la forme

$$s(t) = A \cdot e^{r \cdot t} \quad \text{avec } A \text{ réel ou complexe et } r \text{ réel ou complexe}$$

Remplaçons $s(t)$ et ses dérivées dans l'équation différentielle

$$\frac{d\, s(t)}{dt} = A \cdot r \cdot e^{r \cdot t}$$
$$\frac{d^2\, s(t)}{dt^2} = A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t}$$

soit

$$a \cdot A \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot t} + b \cdot A \cdot r \cdot e^{r \cdot t} + c \cdot A \cdot e^{r \cdot t} = 0$$
$$A \cdot \left(a \cdot r^2 + b \cdot r + c\right) \cdot e^{r \cdot t} = 0$$

Cette égalité n'est nulle que si r est solution de l'équation du second degré :

$$a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0$$

On appelle cette équation l'équation caractéristique de l'équation différentielle. Les racines de cette équation dépendent de Δ :

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0$ alors il existe deux racines réelles :
$r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$.
La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

— $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c < 0$ alors il existe deux racines complexes conjuguées :
$r_1 = \dfrac{-b + j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$ et $r_2 = \dfrac{-b - j \cdot \sqrt{|\Delta|}}{2 \cdot a}$. La solution est alors de la forme :

$$s(t) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot t}$$

Remarque : l'exponentielle complexe : $e^{j \cdot \theta} = \cos\theta + j \cdot \sin\theta$.

Comme les solutions sont réelles, il est d'usage d'écrire sous une de ces deux formes

$$s(t) = e^{-\frac{b}{2\cdot a}\cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t\right) + A_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t\right) \right)$$

$$s(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2\cdot a}\cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\cdot a}\cdot t + \phi\right)$$

— $\Delta = 0$, alors l'équation à une racine réelle double $r_1 = \frac{-b}{2\cdot a}$. On montre que la solution de l'équation différentielle est alors :

$$s(t) = (A_1 \cdot t + A_2) \cdot e^{r_1 \cdot t}$$

A_1, A_2, A et ϕ des constantes réelles à déterminer en fonction des conditions initiales.

c) Équation avec second membre

Si l'équation différentielle possède un second membre, on cherche une solution particulière de même nature que le second membre.

— Le second membre est une constante, on cherche alors une solution particulière constante.

— Le second membre est un polynôme de degré p, on cherche alors une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré p.

— Le second membre est une fonction sinusoïdale de pulsation ω, on cherche alors une solution particulière sinusoïdale de pulsation ω.

La solution complète de l'équation différentielle s'obtient en sommant la solution de l'équation sans second membre et la solution particulière. Les différentes constantes sont déterminées en fonction des conditions initiales.

On le voit, on pourra étudier le comportement d'un système linéaire à partir de la réponse temporelle. Mais cette méthode est peu utilisée en automatique, on préfère utiliser une autre méthode, la transformation de Laplace.

Exemple guidé : Enceinte chauffée

Le système représenté figure 3.11 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

— $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne

— $q(t)$: débit dans l'échangeur

— θ_1 : température en sortie de l'échangeur

— θ : température dans l'enceinte.

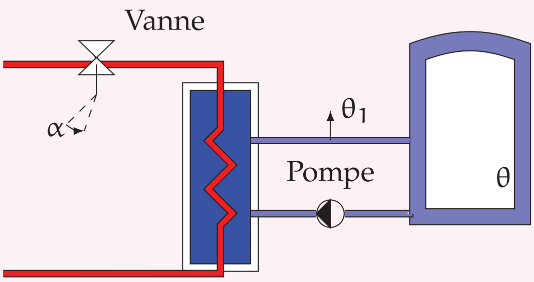


Figure 3.5 – Échangeur thermique

La loi de fonctionnement de la vanne est caractérisée par l'équation :

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$

donnant le débit en fonction de l'angle d'ouverture (le débit est proportionnel à l'ouverture de la vanne).

Les deux autres équations caractérisent le transfert de chaleur :

— dans l'échangeur : $\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \dfrac{d\,\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$;

— et dans l'enceinte : $\theta(t) + \tau_2 \cdot \dfrac{d\,\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$.

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

L'entrée du système est l'angle d'ouverture de la vanne $\alpha(t)$ et la température de l'enceinte θ, la sortie.

Cherchons l'équation différentielle donnant $\theta(t)$ en fonction de $\alpha(t)$. Quel est l'ordre de la fonction de transfert ?

$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\,\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$$
$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$$

Commençons par dériver la seconde et la multiplier par τ_1 !

$$\frac{1}{k_2}\left(\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt}\right) = \theta_1(t)$$
$$\frac{1}{k_2}\left(\tau_1 \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} + \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \frac{d^2\,\theta(t)}{dt^2}\right) = \tau_1 \cdot \frac{d\,\theta_1(t)}{dt}$$

On somme les deux :

$$\frac{1}{k_2}\left(\theta(t) + (\tau_2+\tau_1) \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} + \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \frac{d^2\,\theta(t)}{dt^2}\right) = \theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\,\theta_1(t)}{dt}$$

On retrouve à gauche la première équation que l'on substitue :

$$\frac{1}{k_2}\left(\theta(t) + (\tau_2+\tau_1) \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} + \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \frac{d^2\,\theta(t)}{dt^2}\right) = k_1 \cdot q(t)$$

soit en fonction de $\alpha(t)$:

$$\theta(t) + (\tau_2+\tau_1) \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} + \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot \frac{d^2\,\theta(t)}{dt^2} = k_1 \cdot k_1 \cdot k_1 \cdot \alpha(t)$$

On reconnaît une équation différentielle du second ordre à coefficient constant avec un second membre. L'équation caractéristique s'écrit :

$$1 + (\tau_2+\tau_1) \cdot p + \tau_1 \cdot \tau_2 \cdot p^2 = 0$$
$$(1+\tau_1 \cdot p) \cdot (1+\tau_2 \cdot p) = 0$$

Ici les deux solutions sont réelles $(-\frac{1}{\tau_1}, -\frac{1}{\tau_2})$. La solution de l'équation différentielle sans second membre est :

$$\theta_g(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

Le second membre est une constante $k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha(t) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0$. On cherche donc une solution particulière constante, ici :

$$\theta_p(t) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0$$

La solution complète est :

$$\theta(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + B \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0$$

avec des conditions initiales nulles, on obtient finalement :

$$\theta(t) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(1 - \frac{\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2}\right)$$

3.6 Description par la transformation de Laplace

L'utilisation de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles, a été développée par Heaviside. Nous allons, en préalable à cette partie, nous intéresser à la transformation de Laplace

3.6.1 Transformation de Laplace

a) Définition

Soit f une fonction de la variable réelle t définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour $t < 0$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt$$

avec p une variable réelle ou complexe.

On note :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$$

avec $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$.

Remarque : en France, on utilise préférentiellement la variable p mais les pays anglo-saxons utilisent plutôt la variable s. Il est d'usage de noter les transformées de Laplace par une lettre majuscule.

En automatique, on n'utilise que la transformée de Laplace restreinte qui ne s'applique qu'aux fonctions causales (c'est-à-dire aux fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$).

Pour transformer une fonction quelconque en fonction causale, on la combine avec la fonction existence ou fonction de *Heaviside* notée $\mathcal{H}(t)$ et définie par : $\begin{cases} t < 0 : & \mathcal{H}(t) = 0 \\ t \geqslant 0 : & \mathcal{H}(t) = 1 \end{cases}$

Ainsi on ne calcule pas la transformée de Laplace de $\cos(\omega \cdot t)$ mais de $\cos(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)$.

Conditions d'existence : il sort du cadre de ce cours de préciser les conditions d'existence de la transformée de Laplace. On pourra admettre que la transformée existe si :

— f est continue et bornée sur $[0, +\infty[$, alors la transformée de Laplace F existe pour tout $p > 0$. En effet, dans ce cas :

$$|f(t) \cdot e^{-pt}| \leqslant M \cdot e^{-pt}$$

et l'intégrale de e^{-pt} est convergente.

b) Propriétés

Les trois premières propriétés sont évidentes et déduites des propriétés de l'exponentielle et de l'intégrale.

Unicité : à une fonction temporelle $f(t)$, il correspond une transformée de Laplace $F(p)$ unique et réciproquement.

Additivité

$$\mathcal{L}\left(f(t)+g(t)\right)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)+\mathcal{L}\left(g(t)\right)=F(p)+G(p)$$

Linéarité

$$\mathcal{L}\left(a\cdot f(t)+b\cdot g(t)\right)=a\cdot\mathcal{L}\left(f(t)\right)+b\cdot\mathcal{L}\left(g(t)\right)=a\cdot F(p)+b\cdot G(p)$$

Les suivantes sont celles qui justifient l'utilisation des transformées de Laplace dans l'étude des systèmes linéaires.

Dérivation

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)=p\cdot F(p)-f(0)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2\,f(t)}{dt^2}\right)=p^2\cdot F(p)-p\cdot f(0)-\dot{f}(0)$$

Si le système est dans les *conditions de Heaviside*, c'est-à-dire $f(0)=0$, $\dot{f}(0^+)=0$ et toutes les dérivées en 0 sont nulles, alors :

— dérivée première :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d\,f(t)}{dt}\right)=p\cdot F(p)$$

— dérivée seconde :

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2\,f(t)}{dt^2}\right)=p^2\cdot F(p)$$

Dans les conditions de Heaviside, dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique (domaine de Laplace).

Intégration

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(p)}{p}+\frac{A_0}{p}$$

en posant : $g(t)=\int_0^t f(x)dx$ et $g(0^+)=A_0$

Dans les conditions de Heaviside $(g(0^+)=0)$ cette relation devient :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)dx\right)=\frac{F(p)}{p}$$

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique.

Théorème de la valeur finale

Si la fonction $f(t)$ est une fonction convergente (elle possède une limite) alors :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} p\cdot F(p)$$

Théorème de la valeur initiale

Si la fonction $f(t)$ possède une limite en 0, alors :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p)$$

Théorème du retard

$$\mathcal{L}\left(f(t-\tau)\right) = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

c) Transformées de signaux élémentaires

Nous aurons souvent besoin de déterminer le comportement d'un système linéaire sollicité par un signal caractéristique.

Échelon $f(t) = A \cdot \mathcal{H}(t)$: A une constante et $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt$$
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot \mathcal{H}(t) dt$$
$$F(p) = \left[\frac{-A}{p} \cdot e^{-p \cdot t}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p}$$

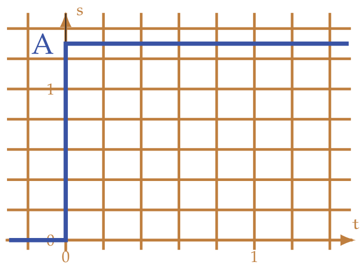


FIGURE 3.6 – Échelon d'amplitude A

Créneau Pour déterminer la transformée de ce signal, on le décompose en deux fonctions :

$f_1(t)$ est une fonction échelon et $f_2(t)$ est une fonction échelon retardée d'amplitude opposée à celle de $f_1(t)$, on a donc $f_2(t) = -f_1(t-\tau)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$
$$f(t) = f_1(t) + -f_1(t-\tau)$$

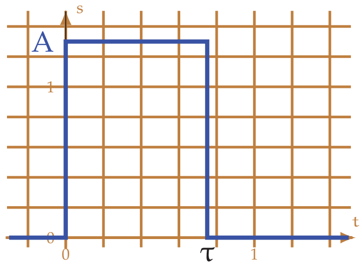


FIGURE 3.7 – Créneau

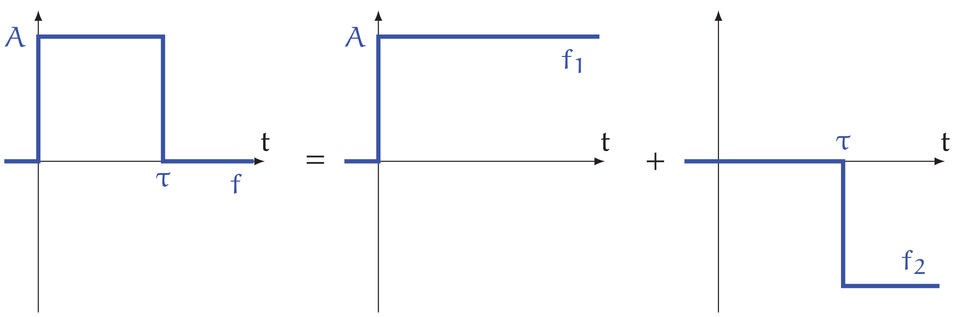


FIGURE 3.8 – Créneau

On peut donc déduire, à partir de la transformée de Laplace d'un échelon et du théorème du retard la transformée d'un créneau :

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t) - f_1(t-\tau)\right) = \mathcal{L}\left(f_1(t)\right) - \mathcal{L}\left(f_1(t-\tau)\right)$$
$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{A}{p} - \frac{A \cdot e^{-\tau \cdot p}}{p} = \frac{A}{p}\left(1 - e^{-\tau \cdot p}\right)$$

Impulsion de Dirac L'impulsion de Dirac est définie par : $\forall t \neq 0, \delta(t) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.

Pour réaliser le calcul de la transformée, on modélise la fonction de Dirac par :
$\begin{cases} 0 < t < \varepsilon & ,\delta(t) = \frac{1}{\varepsilon} \\ \text{sinon,} & \delta(t) = 0 \end{cases}$

L'impulsion de Dirac est obtenue en faisant tendre ε vers 0.

On peut reprendre le résultat du calcul de la transformée du créneau en posant $A = \dfrac{1}{\varepsilon}$ et en faisant tendre ε vers 0 :

$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon \cdot p}\right)$

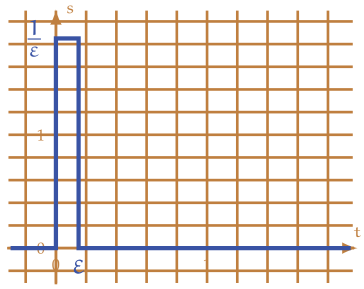


Figure 3.9 – Impulsion de Dirac

À partir du développement au premier ordre de l'exponentielle : $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + o(x)$

$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - e^{-\varepsilon \cdot p}\right)$$
$$\mathcal{L}\left(\delta(t)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon \cdot p}\left(1 - (1 + \varepsilon \cdot p)\right) = 1$$

Rampe $f(t) = A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt$$
$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) dt$$

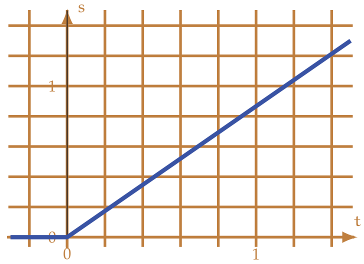


Figure 3.10 – Rampe

Pour résoudre, il faut utiliser l'intégration par parties[4] soit : $\int_a^b u \cdot \dot{v}\, dt = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b \dot{u} \cdot v\, dt$

avec ici $\begin{cases} u(t) = t, & \dot{v}(t) = e^{-p \cdot t} \\ \dot{u}(t) = 1, & v(t) = -\dfrac{e^{-p \cdot t}}{p} \end{cases}$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} A \cdot t \cdot \mathcal{H}(t) dt$$
$$F(p) = A \cdot \left[t \cdot \frac{-e^{-p \cdot t}}{p}\right]_0^{+\infty} - A \cdot \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-p \cdot t}}{p} dt$$
$$F(p) = 0 + A \cdot \left[\frac{-e^{-p \cdot t}}{p^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{A}{p^2}$$

Tableau des transformées En fait, il est très peu probable que l'on doive réaliser le calcul d'une transformée de Laplace. Dans la majorité des cas, la fonction à étudier est une fonction connue dont la transformée a déjà été calculée, ses fonctions sont précisées dans les tableaux suivants. Ils sont utilisés aussi bien pour déterminer la transformée que la transformée inverse.

Dans les tableaux, $\mathcal{H}(t)$ représente la fonction échelon unitaire de Heaviside et $\delta(t)$ l'impulsion de Dirac.

4. L'intégration par parties sera vue en math

Transformées usuelles

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$	$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\delta(t)$	1	$(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p(1+\tau.p)}$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-\tau\cdot p}$	$e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$a\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p}$	$\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$a\cdot\mathcal{H}(t-\tau)$	$\dfrac{a}{p}\cdot e^{-\tau\cdot p}$	$\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$a\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{a}{p^2}$	$e^{-a\cdot t}\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{\omega^2+(p+a)^2}$
$t^n\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-a\cdot t}\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{\omega^2+(p+a)^2}$
$e^{-a\cdot t}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p+a}$	$\dfrac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
$\dfrac{1-e^{-a\cdot t}}{a}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(p+a)}$	$\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

Transformées des systèmes du 1er et du 2de ordre

$f(t)\cdot\mathcal{H}(t)$	$F(p)$
$\dfrac{1}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{1+\tau\cdot p}$
$\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$\left(t-\tau\cdot\left(1-\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p^2\cdot(1+\tau\cdot p)}$
$t\cdot\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau\cdot p)^2}$
$\left(1-(t+\tau)\cdot\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau^2}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p\cdot(1+\tau\cdot p)^2}$
$\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(e^{-\frac{t}{\tau_1}}-e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$
$\left(1+\dfrac{1}{(\tau_1-\tau_2)}\cdot\left(\tau_1.e^{-\frac{t}{\tau_1}}-\tau_2.e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{p.(1+\tau_1 p)\,(1+\tau_2 p)}$
$\dfrac{1}{\omega_0\cdot\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}.t\right)\cdot\mathcal{H}(t)$	$\dfrac{1}{{\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2}$ avec $z<1$
$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\cdot\sin\left(\omega_0\sqrt{1-z^2}\cdot t+\varphi\right)\right)\cdot\mathcal{H}(t)$ et $\varphi=\arccos z$	$\dfrac{1}{p\,({\omega_0}^2+2\cdot z\cdot\omega_0\cdot p+p^2)}$ avec $z<1$

Transformées inverses Soit $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$ la fonction $f(t)$. On note :

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right).$$

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée. La résolution analytique de la transformée n'est pas au programme. La détermination de la transformée ne se fait qu'à partir du tableau des transformées.

Lorsque la fonction $F(p)$ est dans le tableau on obtient directement l'original $f(t)$. Dans le cas contraire, on décomposera la fonction pour faire apparaître des formes connues de fonctions de Laplace.

Les fonctions de Laplace dont il faut déterminer la transformée inverse sont généralement des fractions rationnelles de la forme :

$$H(p) = K' \cdot \frac{1}{p^{\alpha}} \cdot \frac{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_m \cdot p^m}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2 + \cdots + b_m \cdot p^m} \quad \text{avec} \quad \alpha + m > n.$$

Hormis pour quelques formes simples, on ne connaît pas la transformée inverse.

On sait qu'il est toujours possible d'écrire toute fraction rationnelle sous la forme d'une somme de fractions élémentaires à partir d'une décomposition en éléments simples.

Montrons-le à l'aide de quelques exemples simples.

Racines réelles simples Si la fonction de transfert ne présente que des pôles réels simples, la décomposition s'écrit comme la somme des fractions simples de chaque pôle.

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2 + 15 \cdot p + 50} = \frac{p+2}{(p+5) \cdot (p+10)}$$

Sa décomposition en fractions simples est donc de la forme suivante :

$$F(p) = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$$

Par identification on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} &= \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10} \\ \frac{p+2}{(p+5)\cdot(p+10)} &= \frac{p\cdot(A+B) + 10\cdot A + 5\cdot B}{(p+5)\cdot(p+10)} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} \\ B = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

soit

$$F(p) = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{p+5} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{p+10}$$

La transformée inverse de ces deux fractions simples est déduite directement à partir du tableau des transformées.

$$\frac{1}{p+a} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \mathcal{H}(t)$$

d'où

$$f(t) = \left(-\frac{3}{5} \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{8}{5} \cdot e^{-10 \cdot t} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

Racines réelles multiples Dans le cas de racines réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes.

Pour

$$F(p) = \frac{p+2}{p^3 + 20 \cdot p^2 + 125 \cdot p + 250} = \frac{p+2}{(p+5)^2 \cdot (p+10)}$$

la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{A}{(p+5)^2} + \frac{B}{(p+5)} + \frac{C}{(p+10)}$$

Une autre méthode pour déterminer les coefficients est d'isoler le coefficient que l'on cherche. Pour cela, on multiplie la fonction de transfert des deux côtés de l'égalité par le polynôme de la racine concernée. On calcule ensuite, pour le pôle concerné la valeur de cette égalité.

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{p+2}{(p+5)^2\cdot(p+10)} &= \frac{A}{(p+5)^2}+\frac{B}{(p+5)}+\frac{C}{(p+10)}\\
(p+5)^2\cdot\frac{p+2}{(p+5)^2\cdot(p+10)} &= (p+5)^2\cdot\frac{A}{(p+5)^2}+(p+5)^2\frac{B}{(p+5)}+(p+5)^2\frac{C}{(p+10)}\\
\frac{p+2}{(p+10)} &= A+(p+5)\cdot B+(p+5)^2\frac{C}{(p+10)}
\end{aligned}$$

On pose ensuite $p=-5$, les deux derniers termes sont nuls et il reste :

$$\frac{-5+2}{(-5+10)}=A=-\frac{3}{5}$$

Le coefficient C est déterminé de la même manière et on trouve $C=-\frac{8}{25}$.

$$\begin{aligned}
\frac{p+2}{(p+5)^2\cdot(p+10)} &= \frac{A}{(p+5)^2}+\frac{B}{(p+5)}+\frac{C}{(p+10)}\\
\frac{(p+10)\cdot(p+2)}{(p+5)^2\cdot(p+10)} &= \frac{A\cdot(p+10)}{(p+5)^2}+\frac{B\cdot(p+10)}{(p+5)}+C\\
\frac{(-10+2)}{(-10+5)^2} &= C=-\frac{8}{25}
\end{aligned}$$

Le coefficient B ne peut pas être déterminé par cette méthode, on peut soit finir par identification soit en prenant une valeur particulière pour p, ici la valeur la plus simple est $p=0$.

$$\begin{aligned}
\frac{p+2}{(p+5)^2\cdot(p+10)} &= -\frac{3}{5\cdot(p+5)^2}+\frac{B}{(p+5)}-\frac{8}{25\cdot(p+10)}\\
\frac{0+2}{(0+5)^2\cdot(0+10)} &= -\frac{3}{5\cdot(0+5)^2}+\frac{B}{(0+5)}-\frac{8}{25\cdot(0+10)}
\end{aligned}$$

Soit $B=\frac{8}{25}$ et finalement :

$$F(p)=-\frac{3}{5\cdot(p+5)^2}+\frac{8}{25\cdot(p+5)}-\frac{8}{25\cdot(p+10)}$$

On trouve dans le tableau des transformées :

$$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}e^{-a.t}\cdot t^n\cdot\mathcal{H}(t)$$

soit

$$\frac{1!}{(p+5)^{1+1}}=\frac{1!}{(p+a)^2}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}e^{-5.t}\cdot t\cdot\mathcal{H}(t)$$

d'où

$$f(t)=\left(-\frac{3}{5}\cdot t\cdot e^{-5\cdot t}+\frac{8}{25}\cdot e^{-5\cdot t}-\frac{8}{25}\cdot e^{-10\cdot t}\right)\cdot\mathcal{H}(t)$$

Racines complexes Dans le cas de racines complexes conjuguées, il est possible de raisonner comme dans le cas des racines réelles mais cela fait apparaître des coefficients complexes. Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels, pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur.

Ainsi

$$F(p) = \frac{3}{p \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

se décompose sous la forme :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot p + C}{(p^2 + 2 \cdot p + 5)} = \frac{3}{5 \cdot p} + \frac{-3 \cdot p - 6}{5 \cdot (p^2 + 2 \cdot p + 5)}$$

Le coefficient A peut être déterminé en isolant, par contre pour les deux autres, il est préférable de les identifier directement soit :

$$F(p) = \frac{3}{5 \cdot p} + \frac{-3 \cdot p - 6}{2^2 + (p+1)^2}$$

Pour déterminer la transformée inverse, il faut mettre le dénominateur du second ordre sous la forme canonique.

$$F(p) = \frac{3}{5 \cdot p} - \frac{3 \cdot p}{2^2 + (p+1)^2} - \frac{6}{2^2 + (p+1)^2}$$

À partir du tableau des transformées inverses :

$$\begin{aligned}
\frac{a}{p} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} a \cdot \mathcal{H}(t) \\
\frac{\omega}{\omega^2 + (p+a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t) \\
\frac{p}{\omega^2 + (p+a)^2} &\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \mathcal{H}(t)
\end{aligned}$$

d'où

$$f(t) = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \cos(2 \cdot t) + \frac{3}{10} \cdot \sin(2 \cdot t)\right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

En conclusion

Lorsque la fonction $F(p)$ est sous la forme d'une fraction rationnelle en p, la méthode à utiliser est la décomposition en éléments simples puis à rechercher dans le tableau des transformées la fonction temporelle de chaque fraction rationnelle.

Pour déterminer les coefficients, on peut soit :

— résoudre par identification,

— déterminer les coefficients en utilisant la valeur de la fonction pour des valeurs particulières,

— déterminer les coefficients après les avoir isolés.

La transformée inverse de $F(p)$ est la somme des transformées inverses de chaque fonction élémentaire.

3.6.2 Utilisation pour la résolution d'équations différentielles

La transformation permet de ramener l'étude des équations différentielles dans le domaine temporel, à une étude d'un polynôme dans le domaine symbolique.

Soit l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants avec un second membre.

$$b_2 \frac{d^2\, s(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d\, s(t)}{dt} + b_0 \cdot s(t) = e(t)$$

On considère que les conditions initiales sont nulles pour $s(t)$ et ses dérivées. Si ce n'est pas le cas, en général un simple changement de variable permet de se placer dans le cas de conditions initiales nulles.

On pose : $E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right)$ et $S(p) = \mathcal{L}\left(s(t)\right)$.

On en déduit $\mathcal{L}\left(\dfrac{d\,s(t)}{dt}\right) = p \cdot S(p)$ et $\mathcal{L}\left(\dfrac{d^2\,s(t)}{dt^2}\right) = p^2 \cdot S(p)$.

En substituant :

$$\begin{aligned} b_2\left(p^2 \cdot S(p) + b_1 \cdot p \cdot S(p) + b_0\right) \cdot S(p) &= E(p) \\ \left(b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot S(p) &= E(p) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire la fraction rationnelle suivante :

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot E(p).$$

La transformation de Laplace transforme l'équation différentielle en une équation algébrique. La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse de la fraction rationnelle.

Ce résultat est important, il permet de montrer que dans le domaine symbolique, la sortie (la solution de l'équation différentielle) s'obtient comme le produit de :

— la transformée de Laplace du signal d'entrée : $E(p) = \mathcal{L}\left(e(t)\right)$

— et d'une fraction rationnelle.

On appelle $H(p)$ la **fonction de transfert** du système linéaire :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}.$$

On utilise pour représenter le système, une représentation graphique, le schéma-bloc :

$$\xrightarrow{E(p)} \boxed{\frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}} \xrightarrow{S(p)}$$

La réponse temporelle est obtenue en recherchant la transformée inverse du produit de la fraction rationnelle et de l'entrée.

Il faut encore préciser l'entrée $e(t)$ et sa transformée de Laplace, ainsi si :

— l'entrée est un échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ alors $E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{E_0}{p}$$

— l'entrée est une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ alors $E(p) = \dfrac{a}{p^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{a}{p^2}$$

— une entrée sinusoïdale $e(t) = A_0 \cdot \sin(\omega_t)$ alors $E(p) = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$S(p) = \frac{1}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

On constate sur ces exemples que $S(p)$ est une fraction rationnelle qu'il suffit de décomposer pour obtenir la transformée inverse.

Nous allons le montrer sur un exemple.

Exemple guidé : Enceinte chauffée - transformation de Laplace et schémas-blocs

On reprend l'exemple de l'enceinte déjà résolu plus haut.

Le système représenté figure 3.11 est chargé de maintenir la température d'une enceinte. Le chauffage est assuré par un échangeur thermique, la vanne v, permet de réguler le débit du fluide calorifique dans l'échangeur. On note :

- $\alpha(t)$: l'angle d'ouverture de la vanne
- $q(t)$: débit dans l'échangeur
- θ_1 : température en sortie de l'échangeur
- θ : température dans l'enceinte.

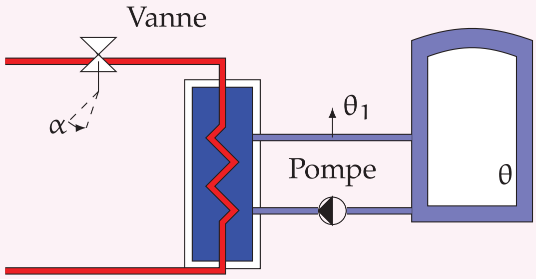


FIGURE 3.11 – Échangeur thermique

Les équations qui décrivent le comportement sont :

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t)$$
$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\,\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)$$
$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)$$

On suppose que toutes les conditions initiales sont nulles.

On note : $A(p)$ la transformée de Laplace de $\alpha(t)$ et $Q(tp)$, $\Theta(p)$ et $\Theta_1(p)$ respectivement les transformées de $q(t)$, $\theta(t)$ et $\theta_1(t)$.

On commence par écrire la transformée de Laplace de chaque équation.

$$q(t) = k_0 \cdot \alpha(t) \xrightarrow{L} Q(p) = k_0 \cdot A(p)$$
$$\theta_1(t) + \tau_1 \cdot \frac{d\,\theta_1(t)}{dt} = k_1 \cdot q(t)) \xrightarrow{L} \Theta_1(p) + \tau_1 \cdot p \cdot \Theta_1(p) = k_1 \cdot Q(p)$$
$$\theta(t) + \tau_2 \cdot \frac{d\,\theta(t)}{dt} = k_2 \cdot \theta_1(t)) \xrightarrow{L} \Theta(p) + \tau_2 \cdot \Theta(p) = k_2 \cdot \Theta_1(p)$$

Les équations différentielles sont devenues des équations linéaires.

Il est facile de déterminer la relation donnant $\Theta(p)$ en fonction de $A(p)$ et d'en déduire la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{\Theta(p)}{A(p)}$.

$$\Theta(p) = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot A(p)$$
$$G(p) = \frac{\Theta(p)}{A(p)} = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot A(p)$$

L'entrée est un échelon constante $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \mathcal{H}(t)$. La transformée dans le domaine de Laplace donne : $A(p) = \dfrac{\alpha_0}{p}$.

$$\Theta(p) = \frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p}$$

Pour déterminer la transformée inverse, il est nécessaire de réaliser la décomposition en fractions simples.

$$\Theta(p) = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

Les trois coefficients sont déterminés par identification en égalant :

$$\frac{k_0 \cdot k_1 \cdot k_2}{(1+\tau_1 \cdot p)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{\alpha_0}{p} = \frac{A}{(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{B}{(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{C}{p}$$

On obtient (je vous laisse vérifier les calculs !) :

$$\Theta(p) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(\frac{\tau_1^2}{(\tau_1 - \tau_2)\cdot(1+\tau_1 \cdot p)} + \frac{\tau_1^2}{(\tau_1 - \tau_2)\cdot(1+\tau_2 \cdot p)} + \frac{1}{p} \right)$$

Le tableau des transformées nous donne : $\dfrac{1}{1+\tau \cdot p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dfrac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \mathcal{H}(t)$ ce qui nous permet d'écrire la réponse temporelle.

$$\theta(t) = k_0 \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \alpha_0 \cdot \left(1 - \frac{\tau_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}}}{\tau_1 - \tau_2} \right) \cdot \mathcal{H}(t).$$

La transformée de Laplace permet donc de résoudre les équations différentielles à coefficients constants. Cette méthode ne permet pas de résoudre d'autres équations que celles que l'on pourraient résoudre par la méthode classique ; par contre elle permet de prendre en compte rapidement les conditions initiales et surtout les signaux d'entrées composés.

3.7 Fonction de transfert – Transmittance

Un système dynamique linéaire est décrit par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée et de sortie.

$$b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{d\,y(t)}{dt} + b_0 \cdot y(t) = a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{d\,x(t)}{dt} + a_0 \cdot x(t)$$

On se place dans les conditions de Heaviside (toutes les conditions initiales sont nulles).

On pose : $\mathcal{L}\left(x(t)\right) = X(p)$ et $\mathcal{L}\left(y(t)\right) = Y(p)$.

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'égalité les conditions initiales étant nulles :

$$\left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0\right) \cdot Y(p) = \left(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0\right) \cdot X(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$Y(p) = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0} \cdot X(p)$$

On appelle

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}$$

la fonction de transfert (ou transmittance) du système.

Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur : $m > n$.

3.7.1 Pôles et zéros

On appelle :

zéros : les racines de $N(p) = 0$, le polygone du numérateur.

pôles : les racines de $D(p) = 0$, le polynôme du dénominateur

3.8 Forme canonique

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme suivante dite forme canonique avec :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = K \cdot \frac{N(p)}{p^{\alpha} \cdot D_1(p)} = \frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + 1}{p^{\alpha}\left(b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + 1\right)}$$

avec

- $N(p)$: un polynôme en p avec $N(0) = 1$;
- $D_1(p)$: un polynôme en p avec $D_1(0) = 1$;
- K : le gain de la fonction de transfert ;
- α : la classe de la fonction de transfert.

Pour les systèmes du premier et du second ordre, on mettra les fonctions de transfert sous la forme :

Premier ordre

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

avec K le gain statique et τ la constante de temps.

Second ordre

$$H_2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

avec K le gain statique, ξ le coefficient d'amortissement et ω_n la pulsation propre.

3.9 Schéma-bloc

À partir de la fonction de transfert, on établit le schéma-bloc du système

$$\xrightarrow{X(p)} \boxed{H(p)} \xrightarrow{Y(p)} \quad \text{soit} \quad \xrightarrow{X(p)} \boxed{\frac{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p + a_0}{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot p + b_0}} \xrightarrow{Y(p)}$$