

**1.7 Corrigés n°1**

**Cor. 1 : Pied de Gru**

Sujet page 28

**Q1.** Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle plan d'un seul pied, de la liaison portique/sol donné sur la figure 1.12a. En déduire la répartition de la charge entre les 8 galets.

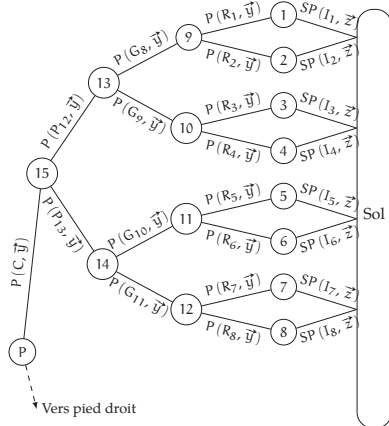
Pour le pied gauche (figure 1.12). On pose, de la gauche vers la droite,

- les roues sont numérotées de 1 à 8,
- les supports de galet de 9 à 11
- les poutres inférieures 12 et 13
- la poutre supérieure gauche 14
- le portique P
- le sol S

On note

- $I_i$  ( $i \in [1, \dots, 8]$ ) le point de contact avec le sol et  $R_i$  le centre de la liaison pivot entre chaque roue et le support de galet.
- $G_i$  ( $i \in [9, \dots, 11]$ ) le centre de la liaison pivot entre le support de galet et la poutre inférieure.
- $P_{12}$  et  $P_{13}$  les centres de liaisons de chaque poutre inférieure avec la poutre supérieure.

On a le graphe de structure suivant :



On rappelle le torseur cinématique d'une liaison pivot pour une modélisation plane dans le plan  $(O, \vec{z}, \vec{x})$  et du torseur des actions transmissibles ainsi que ceux de la liaison sphère plan.

Liaison pivot plane d'axe  $(C_{ij}, \vec{y})$ .

$$\{V_{S_i/S_j}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{yij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C_{ij}} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

$$\{A_{j \rightarrow i}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & [0] \\ [0] & 0 \\ Z_{ij} & [0] \end{Bmatrix}_{C_{ij}} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Liaison sphère plan de normale  $(I_i, \vec{z})$

$$\{V_{R_i/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{xij} \\ \omega_{yij} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C_{ij}} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

$$\{A_{j \rightarrow i}\} = \begin{Bmatrix} 0 & [0] \\ [0] & 0 \\ Z_{ij} & [0] \end{Bmatrix}_{C_{ij}} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Le mécanisme complet comporte  $N = 1 + 2 \times 15 + 1 = 32$  solides.

On peut isoler  $(N - 1) = 31$  solides indépendants soit dans la cas de la modélisation plane :  $E_s = 3 \times (N - 1) = 93$  équations.

Ce système comporte  $I_s = 2 \times (8 \times 1 + 15 \times 2) = 76$  inconnues de liaisons.

Finalement le rang est  $r_s L \leq 76$ . Il y a donc au moins 17 équations nulles ou liées.

On sait que :

$$m - h = E_s - I_s$$

Pour que le système soit isostatique, il faut pour identifier 17 mobilités. On distingue

- la mobilité utile  $m = 1$  la translation de l'ensemble le long du rail suivant  $\vec{y}$ .
- $m_i = 16$ , chaque roue peut pivoter sur son axe sans déplacer l'ensemble.

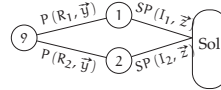
Il n'y a, a priori, aucune autre mobilité.

Le mécanisme est donc isostatique.

**Q2.** À partir de l'étude des mobilités du pied décrit figure 1.11, proposer une liaison équivalente à la liaison assurée par un pied entre le portique et le rail, dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  de la figure 1.12a, en précisant ses caractéristiques géométriques.

Montrons que la liaison équivalente est une liaison glissière de direction  $\vec{x}$ .

Déterminons dans un premier temps la liaison équivalente entre  $SG_1$  et le sol S.



Déterminons d'abord les deux liaisons en série.

On réalise une étude cinématique

$$\{V_{9/S}\} = \{V_{9/1}\} + \{V_{1/S}\}$$

$$\{V_{9/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{91} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

$$\{V_{1/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{1S} \\ \omega_{1S} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{I_1} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

On écrit les deux torseurs en  $R_1$  (on pose  $\vec{I}_1 R_1 = z_1 \cdot \vec{z}$ )

$$\{V_{1/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{1S} + z_1 \cdot \omega_{1S} \\ \omega_{1S} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

soit

$$\{V_{9/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{9S} + z_1 \cdot \omega_{9S} \\ \omega_{9S} + \omega_{1S} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Cette liaison est équivalente à une liaison sphère plan de normale  $(R_1, \vec{z})$ . On remarque que le torseur comporte 3 paramètres pour cette liaison alors que 2 suffisent. On retrouve la mobilité interne

pour la suite on pose  $\omega_{u1} = \omega_{91} + \omega_{1S}$  et  $V_{91S} = V_{1S} + z_1 \cdot \omega_{1S}$  pour simplifier l'écriture.

$$\{V_{9/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{91S} \\ \omega_{u1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Le t Par analogie, on peut écrire la liaison équivalente pour les deux autres liaisons en série.

$$\{V_{2/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{2S} \\ \omega_{u2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R_2} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Les deux liaisons sont en parallèle, la liaison équivalente s'obtient en égalant les deux liaisons.

$$\{V_{9/S}\} = \{V_{1/S}\} = \{V_{2/S}\}$$

On écrit la liaison équivalente en  $G_8$ , le centre de la liaison pivot entre la poutre inférieure 1 et le support de galet 1.

On pose  $\vec{R}_1 G_8 = -x_2 \cdot \vec{x} + z_2 \cdot \vec{z}$  et  $\vec{R}_2 G_8 = x_2 \cdot \vec{x} + z_2 \cdot \vec{z}$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{G_8 \in 9/S} &= \vec{V}_{R_1 \in 9/S} + \vec{\Omega}_{9/S} \wedge \vec{R}_1 G_8 \\ \vec{V}_{G_8 \in 9/S} &= V_{91S} \cdot \vec{x} + \omega_{u1} \cdot \vec{y} \wedge (-x_2 \cdot \vec{x} + z_2 \cdot \vec{z}) \\ \vec{V}_{G_8 \in 9/S} &= V_{91S} \cdot \vec{x} + x_2 \cdot \omega_{u1} \cdot \vec{z} + z_2 \cdot \omega_{u1} \cdot \vec{x} \end{aligned}$$

soit pour le premier torseur :

$$\{V_{9/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{91S} + z_2 \cdot \omega_{u1} \\ \omega_{u1} & 0 \\ 0 & x_2 \cdot \omega_{u1} \end{Bmatrix}_{G_8} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

et par analogie

$$\{V_{2/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{2S} + z_2 \cdot \omega_{u2} \\ \omega_{u2} & 0 \\ 0 & -x_2 \cdot \omega_{u2} \end{Bmatrix}_{G_8} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Ces deux torseurs sont égaux

$$\begin{aligned} \omega_{u2} &= \omega_{u1} \\ V_{2S} + z_2 \cdot \omega_{u2} &= V_{91S} + z_2 \cdot \omega_{u1} \\ x_2 \cdot \omega_{u2} &= -x_2 \cdot \omega_{u1} \end{aligned}$$

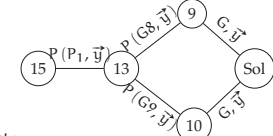
On en déduit  $\omega_{u2} = \omega_{u1} = 0$  et  $V_{91S} = V_{9S}$ .

Le torseur équivalent s'écrit donc

$$\{V_{9/S}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{9S} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G_8} \begin{matrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{matrix}$$

Le torseur est celui d'une liaison glissière. Ce torseur est vrai en tout point.

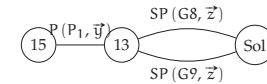
Le graphe de structure limité aux solide  $\{15, 13, 9, 10, S\}$  de-



vient :

On montre rapidement que chaque branche est équivalente à une liaison sphère plan de normale  $(G_8, \vec{z})$

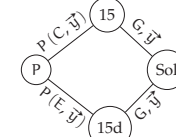
Le schéma devient



On cherche la liaison équivalente entre 15 et le sol.

Ce calcul a déjà été réalisé plus haut, on a trouvé une liaison glissière de direction  $\vec{x}$ .

Finalement le graphe de structure équivalent entre le portique et le sol devient



Le calcul a aussi été réalisé au-dessus. On obtient finalement une liaison glissière de direction  $\vec{x}$  équivalente entre le portique et le sol.

**Q3.** Déterminer littéralement, dans le cadre d'une modélisation dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  de la figure 1.11, les efforts normaux du sol sur la grue transmis par les pieds « gauche » et « droit », lorsque la grue est soumise au vent. (Hypothèses : le mouvement suivant  $\vec{z}$  du conteneur ne sera pas considéré ; le chariot et le portique sont immobiles ; la masse des poutres supérieure, inférieure et des supports de galets est négligeable devant  $M_p$ .)

**A Faire n 1**

**Q4.** En déduire la valeur  $(\text{en km} \cdot \text{h}^{-1})$  de la vitesse de vent  $V_1$  pour laquelle la grue bascule. En déduire la valeur  $(\text{en km} \cdot \text{h}^{-1})$  de la vitesse de vent  $V_2$  pour laquelle la grue glisse, en considérant au contact roue/rail un modèle de frottement sec de coefficient  $f = 0,2$ .

**A Faire n 2**

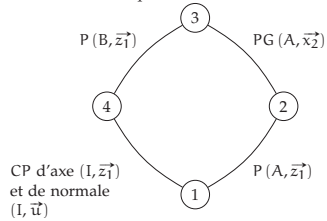
**Cor. 2 : Moteur hydraulique Poclair**

Sujet page 30

**Q1.** À partir du schéma de la figure 1.13, indiquez dans quel sens va tourner le rotor (2) (sens trigonométrique ou horaire). Comment inverser le sens de rotation ?

Dans le sens horaire  
On inverse le sens en inversant les circuits d'alimentation et de refoulement.

**Q2.** Tracer le graphe des liaisons (pour un piston), préciser les torseurs cinématiques.



— Liaison 4/1 : liaison cylindre/plan d'axe (I, z1) et de normale (I, u1)

$$\{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{u41} & 0 \\ 0 & V_{v41} \\ \omega_{z41} & V_{z41} \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

$$TA1 \rightarrow 4 = \begin{Bmatrix} X_{u14} & 0 \\ 0 & M_{v14} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

— Liaison 2/1 : pivot d'axe (A, z1)

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

$$\{A_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

— Liaison 3/2 : Pivot glissant d'axe (A, x2)

$$\{V_{3/2}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{32} & V_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

$$\{A_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & N_{23} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

— Liaison 4/3 : Pivot d'axe (B, z1)

$$\{V_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

$$\{A_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{34} & L_{34} \\ Y_{34} & M_{34} \\ Z_{34} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

**Q3.** Écrire la fermeture cinématique

$$\{V_{4/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/4}\} = \{0\}$$

On écrit la fermeture cinématique en B.

Torseur cinématique 4/1 en B.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B \in 4/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 4/1}} + \overrightarrow{\Omega_{4/1}} \wedge \overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{V_{B \in 4/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 4/1}} + (\omega_{u41} \cdot \vec{u} + \omega_{z41} \cdot \vec{z}) \wedge (-R \cdot \vec{u}) \\ \overrightarrow{V_{B \in 4/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 4/1}} - R \cdot \omega_{z41} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

alors

$$\{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{u41} & 0 \\ 0 & V_{v41} - R \cdot \omega_{z41} \\ \omega_{z41} & V_{z41} \end{Bmatrix}_{(u, v, z)}$$

Torseur cinématique 2/1 en B

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} &= \vec{0} + \omega_{z1} \cdot \vec{z} \wedge \lambda \cdot \vec{x} \\ \overrightarrow{V_{B \in 2/1}} &= \lambda \cdot \omega_{z1} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

d'où le torseur cinématique dans (x2, y2, z2) en B.

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \cdot \omega_{z1} \\ \omega_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)}$$

On choisit d'écrire la fermeture cinématique dans la base (x2, y2, z2).

On projette le torseur cinématique de 4/1 dans la base (x2, y2, z2).

$$\{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{u41} \cos \theta & -(V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \sin \theta \\ \omega_{u41} \sin \theta & (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \cos \theta \\ \omega_{z41} & V_{z41} \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)} + \begin{Bmatrix} \omega_{32} & V_{32} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \cdot \omega_{z1} \\ \omega_{z1} & 0 \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)} \\ - \begin{Bmatrix} \omega_{u41} \cos \theta & -(V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \sin \theta \\ \omega_{u41} \sin \theta & (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \cos \theta \\ \omega_{z41} & V_{z41} \end{Bmatrix}_{(x_2, y_2, z_2)} &= \{0\} \end{aligned}$$

**Q4.** Justifier que si  $\vec{u} \neq \vec{x}_2$ , alors la mobilité de la chaîne {1,2,3,4} pour un seul piston est  $m = 2$ , préciser les deux mobilités.

$$\begin{aligned} \omega_{32} - \omega_{u41} \cos \theta &= 0 \\ \omega_{u41} \sin \theta &= 0 \\ \omega_{43} + \omega_{z1} - \omega_{z41} &= 0 \\ V_{32} + (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \sin \theta &= 0 \\ \lambda \cdot \omega_{z1} - (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \cos \theta &= 0 \\ V_{z41} &= 0 \end{aligned}$$

On résout partiellement le système avec  $\vec{u} \neq \vec{x}_2$

$$\begin{aligned} \omega_{32} &= 0 \\ \omega_{u41} &= 0 \\ V_{z41} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{32} - \omega_{u41} \cos \theta &= 0 \\ \omega_{u41} \sin \theta &= 0 \\ \omega_{43} + \omega_{z1} - \omega_{z41} &= 0 \\ V_{32} - R \cdot \omega_{z41} \sin \theta &= 0 \\ \lambda \cdot \omega_{z1} + R \cdot \omega_{z41} \cos \theta &= 0 \\ V_{z41} &= 0 \end{aligned}$$

Il reste un système de 3 équations avec 5 inconnues.

$$\begin{aligned} \omega_{43} + \omega_{z1} - \omega_{z41} &= 0 \\ V_{32} + (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \sin \theta &= 0 \\ \lambda \cdot \omega_{z1} - (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

Il est donc nécessaire de préciser deux paramètres pour continuer à résoudre.

Il est judicieux de choisir comme paramètre premier paramètre celui qui pilote la mobilité utile du mécanisme : la vitesse de translation du piston  $V_{32}$  qui entraîne la rotation du moteur.

L'autre paramètre est une mobilité interne la rotation du galet 4 par rapport au piston 3 soit  $\omega_{43}$ .

Le système s'écrit alors

$$\begin{aligned} \omega_{21} - \omega_{z41} &= -\omega_{43} \\ (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \sin \theta &= -V_{32} \\ \lambda \cdot \omega_{z1} - (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} V_{v41} &= R \cdot \omega_{43} - \frac{\lambda + R \cdot \cos(\theta)}{\lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \\ \omega_{z1} &= -\frac{\cos(\theta)}{\lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \\ \omega_{z41} &= \omega_{43} - \frac{\cos(\theta)}{\lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \end{aligned}$$

**Q5.** Que devient le degré de mobilité si le galet 4 roule sans glisser sur le corps 1 ?

On a donc  $V_{v41} = 0$ , le système devient :

Le mécanisme ne possède plus qu'une mobilité, toutes les inconnues cinématiques peuvent être déterminées en fonction de  $V_{32}$ .

$$\begin{aligned} \omega_{43} &= \frac{\lambda + R \cdot \cos(\theta)}{R \cdot \lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \\ \omega_{z1} &= -\frac{\cos(\theta)}{\lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \\ \omega_{z41} &= \omega_{43} - \frac{\cos(\theta)}{\lambda \cdot \sin(\theta)} \cdot V_{32} \end{aligned}$$

**Q6.** Que devient le degré de mobilité  $m$  dans cette position ? Que risque-t-il de se produire ?

Si  $\vec{u} = \vec{x}_2$  alors  $\sin \theta = 0$  et  $\cos \theta = 1$ . Le système devient

$$\begin{aligned} \omega_{32} - \omega_{u41} &= 0 \\ 0 &= 0 \\ \omega_{43} + \omega_{z1} - \omega_{z41} &= 0 \\ V_{32} &= 0 \\ \lambda \cdot \omega_{z1} - (V_{v41} - R \cdot \omega_{z41}) &= 0 \\ V_{z41} &= 0 \end{aligned}$$

Le système ne comporte plus que 5 équations utiles et toujours 8 inconnues, il est donc nécessaire de poser 3 paramètres, le système est mobile d'ordre 3.

Aux deux mobilités précédentes, se rajoute la possibilité pour le piston de tourner autour de l'axe (A, x2)  $\omega_{32} \neq 0$ .

Si le piston tourne sur lui-même, le mécanisme va se bloquer dans cette position, il ne pourra plus rouler, il risque la destruction.

**Q7.** Dans le cas, où  $\vec{u} \neq \vec{x}_2$ , préciser le degré d'hyperstatisticité  $h$ .

On a

$$\begin{aligned} m - h &= I_c - E_c \\ 2 - h &= 8 - 6 \Rightarrow h = 0 \end{aligned}$$

Le mécanisme est isostatique.

**Cor. 3 : Changeur d'outil**

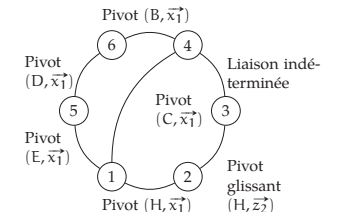
Sujet page 31

**Q1.** Établir le graphe de structure du module changeur et déterminer le nombre et la composition des cycles indépendants.

$$\gamma = L - N + 1 \text{ soit deux cycles indépendants}$$

Cycle 1 {1, 2, 3, 4}

Cycle 2 {1, 4, 6, 5}



**Q2.** Évaluer, par une analyse cinématique, le degré de mobilité de cette chaîne de mise en position. Calculer le degré d'hyperstatisticité.

La boucle {1, 4, 6, 5} est constituée de N = 4 solides, reliés par L = 4 liaisons pivots. On en déduit :

- $\gamma = L - N + 1 = 1$  boucle indépendante
- $I_c = 4 \times 1 = 4$  inconnues cinématiques
- $E_c = 6 \times \gamma = 6$  équations

Le rang du système ne peut être plus grand que  $r_c < \min(E_c, I_c) = 4$ .

Ici, nous savons que le système est mobile et possède une seule mobilité  $m = 1$ . Nous pouvons en déduire le degré d'hyperstatisticité  $m - h = I_c - E_c$  soit  $h = 3$ .

**Q3.** Préciser le mouvement autorisé par la liaison L<sub>1,4</sub> entre la bielle de transmission (4) et le support (1), et écrire au point C puis au point B, l'expression littérale du torseur cinématique  $\{V_{4/1}\}$  caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de  $\theta_{14}$ , et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Rotation d'axe (C,  $\vec{x}_1$ ) soit :

$$\{V_{4/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{C \in 4/1} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec  $\omega_{4/1} = \frac{d\theta_{14}}{dt}$

En B le torseur s'écrit :

$$\{V_{4/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{B \in 4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{CB} \end{array} \right\}_B$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{B \in 4/1} = -b \cdot \omega_{4/1} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_B$$

**Q4.** Préciser le mouvement autorisé par la liaison L<sub>1,5</sub> entre la bielle d'orientation (5) et le support (1), et écrire au point E puis au point D, l'expression littérale du torseur cinématique  $\{V_{5/1}\}$  caractérisant ce mouvement, en fonction de la dérivée temporelle de  $\theta_{15}$  et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Rotation d'axe (E,  $\vec{x}_1$ ) soit :

$$\{V_{5/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

avec  $\omega_{5/1} = \frac{d\theta_{15}}{dt}$

En D ce torseur le torseur s'écrit :

$$\{V_{5/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{4/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{D \in 5/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{ED} \end{array} \right\}_D$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{5/1} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{D \in 5/1} = -b \cdot \omega_{5/1} \cdot \vec{z}_5 \end{array} \right\}_D$$

**Q5.** La figure constituée des points E, C, B et D est un parallélogramme. Sachant que dans un parallélogramme les côtés opposés restent parallèles ( $\theta_{14} = \theta_{15} = \delta$ ), en déduire la nature du mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1). Comment est le champ des vecteurs vitesses de ce mouvement ?

Si  $\theta_{14} = \theta_{15} = \delta$  alors  $\vec{V}_{B \in 4/1} = \vec{V}_{D \in 5/1} = -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$

Les points B et D sont les centres de deux liaisons pivots respectivement, entre le solide (6) et le solide (4) et entre le solide (6) et le solide (5).

On peut déterminer

$$\vec{V}_{B \in 6/1} = \vec{V}_{B \in 6/4} + \vec{V}_{B \in 4/1} = \vec{V}_{B \in 4/1} = b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$$

et

$$\vec{V}_{D \in 6/1} = \vec{V}_{D \in 6/5} + \vec{V}_{D \in 5/1} = \vec{V}_{D \in 5/1}$$

$$= b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$$

Finalement

$$\vec{V}_{B \in 6/1} = \vec{V}_{D \in 6/1} = -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4$$

Deux points du solide (6) ont même vitesse, le mouvement de (6) est donc une translation circulaire.

**Q6.** Écrire au point B puis au point P, l'expression littérale du torseur cinématique  $\{V_{6/1}\}$  caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport au support (1) en fonction de la dérivée temporelle de  $\delta$  et des grandeurs caractéristiques du mécanisme.

Le solide (6) est en translation donc  $\{V_{6/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -b \cdot \frac{d\delta}{dt} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP}$

**Q7.** Écrire au point D puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique  $\{V_{6/5}\}$  caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la bielle de transmission (5).

$\{V_{6/5}\} = \{V_{6/1}\} + \{V_{1/5}\}$  en D cette égalité devient :

$$\{V_{6/5}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_{VP} - \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{D \in 5/1} = -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_D$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

En E  $\{V_{6/5}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{\Omega}_{6/5} \wedge \vec{DE} \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = -\omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ -b \cdot \omega_{51} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{65} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E$

**Q8.** Écrire au point B puis au point E l'expression littérale du torseur cinématique  $\{V_{6/4}\}$  caractérisant le mouvement du porte-outil (6) par rapport à la bielle de transmission (4).

De la même manière,

$$\{V_{6/4}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/4} = -\omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

$\vec{BE} = e \cdot \vec{y}_1 - e \cdot \vec{z}_1$  mais pour faciliter les calculs, on pose  $\vec{BE} = f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4$  (ces deux valeurs peuvent être déterminées si nécessaire!).

$$\vec{V}_{E \in 6/4} = \vec{V}_{B \in 6/4} + \vec{\Omega}_{6/4} \wedge \vec{BE}$$

$$= \vec{0} - \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \wedge (b \cdot \vec{y}_4 + f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4)$$

$$= -b \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 - f \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 + g \cdot \omega_{41} \vec{y}_4$$

Finalement le torseur s'écrit en E :

$$\{V_{6/4}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/4} = -\omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ -b \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 - f \cdot \omega_{41} \vec{z}_4 + g \cdot \omega_{41} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 + f \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{64} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

**Q9.** Écrire les six équations liées à la fermeture cinématique de la chaîne de solide constituée des solides (1), (4), (5) et (6).

$$\{V_{6/4}\} + \{V_{4/1}\} + \{V_{1/5}\} + \{V_{5/6}\} = \{0\}$$

On choisit d'écrire cette relation en E, il reste  $\{V_{4/1}\}$  à déplacer

$$\{V_{4/1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{E \in 4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \wedge (f \cdot \vec{y}_4 + g \cdot \vec{z}_4) \end{array} \right\}_E$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{E \in 4/1} = f \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{41} \cdot \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

d'où la fermeture cinématique

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/4} = \omega_{64} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 + f \cdot \omega_{64} \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{64} \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{4/1} = \omega_{41} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{V}_{E \in 4/1} = f \cdot \omega_{41} \cdot \vec{z}_4 - g \cdot \omega_{41} \cdot \vec{y}_4 \end{array} \right\}_E$$

$$- \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{5/1} = \omega_{51} \cdot \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C - \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{6/5} = \omega_{65} \cdot \vec{x}_1 \\ b \cdot \omega_{65} \cdot \vec{z}_4 \end{array} \right\}_E = \{0\}$$

d'où les 6 équations de la fermeture cinématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

**Q10.** Déterminer le rang du système obtenu à la question précédente. En déduire le degré de mobilité et le degré d'hyperstatisticité de la chaîne de solide étudiée.

Le degré de mobilité est  $m = 1$  (il faut fixer une des vitesses de rotation pour trouver les autres). Le rang est  $r_c = 3$ . On déduit le degré d'hyperstatisticité du nombre équations supplémentaires  $h = E_c - r_c = 3$ .

**Q11.** Pour chacune des propositions, vérifier si le modèle est isostatique, préciser le nombre de mobilités et s'il peut être adopté pour modifier le mécanisme actuel.

Si on reprend le système d'équation précédent on constate que pour rendre le système isostatique, il faut rajouter dans une liaison pivot (ou plusieurs), un degré de liberté en translation suivant  $\vec{x}_1$  et deux rotations suivant  $\vec{z}_1$  et  $\vec{y}_1$  afin que les trois équations nulles ne le soient plus.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

**Cas 1 :** La liaison en B est un pivot glissant d'axe (B,  $\vec{x}_1$ )

$$\{V_{6/4}\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} \quad V_{64} \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} \text{ et la liaison en D une liaison sphérique } \left\{ \begin{array}{l} \omega_{65} \quad 0 \\ \omega_{65y} \quad 0 \\ \omega_{65z} \quad 0 \end{array} \right\}_{D_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} + \omega_{65y} + \omega_{65z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65y} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + V_{64} - b \cdot \omega_{65z} = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

Le système est maintenant de rang  $r_c = 6$  avec  $I_c = 7$  inconnues. Les trois degrés de liberté ajoutés sont nuls et la résolution pour le reste est identique à la précédente. Le mécanisme devient donc isostatique ( $h = 0$ ) et de mobilité inchangée ( $m = 1$ ).

**Cas 4 :** Ici les trois mobilités sont ajoutées dans la même liaison, la liaison devient une liaison sphère-cylindre. Le calcul est analogue au précédent, le mécanisme est isostatique et de mobilité  $m = 1$ .

**Cas 2 :** On a remplacé deux liaisons pivots par deux liaisons sphériques, le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{64} + \omega_{41} - \omega_{51} - \omega_{65} \\ + \omega_{65y} + \omega_{65z} + \omega_{51y} + \omega_{51z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65y} + \omega_{51y} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + \omega_{65z} + \omega_{51z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 - b \cdot \omega_{65z} = 0 \\ -g \cdot \omega_{64} + g \cdot \omega_{41} + 0 + 0 = 0 \\ b \cdot \omega_{64} + f \cdot \omega_{64} - f \cdot \omega_{41} - b \cdot \omega_{65} = 0 \end{array} \right.$$

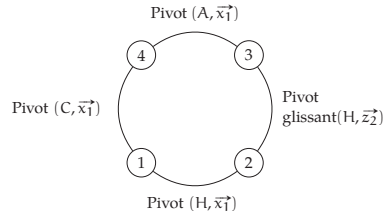
Le système est toujours de rang  $r_c = 6$  mais comporte  $I_c = 8$  inconnues. La mobilité utile existe toujours,  $m_u = 1$  par contre une nouvelle mobilité interne se rajoute, il n'est pas possible de déterminer  $\omega_{65y}$  et  $\omega_{51y}$ . La barre 5 peut pivoter autour de la droite (CE), cette rotation n'est pas gênante pour le fonctionnement,  $m_i = 1$ , finalement  $h = 0$  et  $m = 2$ .

**Cas 3 :** Ce cas semble analogue au précédent, il y a aussi une mobilité interne, la rotation de la barre (BC) mais ici la rotation ne peut être autorisée, le porte-outil ne serait plus correctement positionné.

On peut donc :

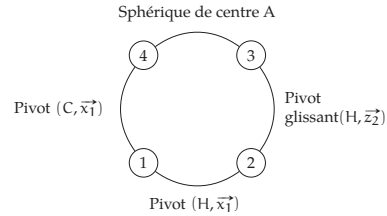
- soit transformer une liaison pivot en sphère-cylindre dont l'axe est suivant  $\vec{x}_1$ ,
- soit transformer une liaison pivot glissant et une autre en rotule.

**Q12.** Montrer, par une analyse cinématique que, si la liaison L<sub>3,4</sub> est une liaison pivot d'axe (A,  $\vec{x}_1$ ), le degré d'hyperstatisticité de la chaîne de mise en mouvement n'est pas nul.



$I_c = 1 + 1 + 1 + 2 = 2$  et  $E_c = 6$   
 Le sous-mécanisme étudié comporte donc 6 équations avec 5 inconnues, le rang ne peut être supérieur au plus petit de  $E_c$  et  $I_c$ , il est donc au maximum de  $r_c \leq 5$ .  
 On peut donc en déduire qu'il y a au moins  $E_c - r_c = 1$  équation supplémentaire, le degré d'hyperstatisme est donc  $h \geq 1$ .

**Q13.** Dans le cas où la liaison  $L_{3,4}$  est une liaison rotule de centre A, calculer le degré de mobilité de la chaîne de mise en mouvement, et montrer que ce système est isostatique. Identifier la (ou les) mobilité(s) de cette chaîne de mise en mouvement.



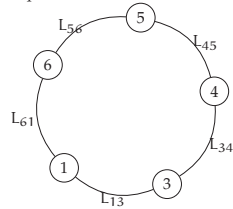
$I_c = 1 + 1 + 3 + 2 = 7$  et  $E_c = 6$   
 Le sous-mécanisme étudié comporte donc 6 équations avec 7 inconnues, le rang ne peut être supérieur au plus petit de  $E_c$  et  $I_c$ , il est donc au maximum de  $r_c \leq 6$ .  
 Il est au moins mobile d'ordre  $m \geq 1$   
 On peut montrer que le mécanisme possède ici deux mobilités :

- une mobilité utile  $m_u = 1$
  - une mobilité interne  $m_i = 1$ , la rotation de 3 autour de son axe  $(A, \vec{x}_2)$ .
- On peut alors écrire que  $m - h = I_c - E_c$  soit  $h = 0$ .

**Cor. 4 : Tête à polir le marbre**

Sujet page 36

**Q1.** Tracer le graphe des liaisons, en nommant les liaisons autres que la liaison 1-6 et en indiquant leurs caractéristiques géométriques.



- Liaisons
- $L_{16}$  : liaison encastrement (par hypothèse);
  - $L_{13}$  : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z})$ ;
  - $L_{34}$  : liaison pivot glissant d'axe  $(O', \vec{z})$ ;
  - $L_{45}$  : liaison pivot glissant d'axe  $(O', \vec{y}_1)$ ;
  - $L_{56}$  : liaison pivot d'axe  $(O, \vec{y}_1)$ .

**Q2.** En supposant l'absence de toute mobilité interne, calculer le degré d'hyperstatisme du système, sans écrire, pour l'instant, de fermeture de chaîne cinématique.

- On sait que  $m - h = I_c - E_c$ , d'où  $h = 1$  avec
- $I_c = 6$  : le nombre d'inconnues cinématiques;
  - $E_c = 6 \cdot \gamma = 6$  : le nombre d'équations issues de l'étude cinématique (avec  $\gamma = 1$ );
  - $m = 1$  par hypothèse.

**Q3.** Exprimer les torseurs cinématiques

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{z}, \vec{z}, \vec{z})}}$$

$$\{V_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{\substack{P \in (O', \vec{z}) \\ (\vec{z}, \vec{z}, \vec{z})}}$$

$$\{V_{5/4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{54} & v_{54} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{P \in (O', \vec{y}_1) \\ (\vec{z}, \vec{y}_1, ?)}}$$

$$\{V_{6/5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{65} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{P \in (O, \vec{y}_1) \\ (\vec{z}, \vec{y}_1, ?)}}$$

avec pour notation  $(\vec{z}, \vec{y}_1, ?)$  pour toute base comportant  $\vec{y}_1$ .

**Q4.** En supposant toujours la liaison 1-6 comme une liaison encastrement, écrire les équations scalaires traduisant la fermeture de la chaîne cinématique au point  $O'$ .

On choisit d'écrire la fermeture cinématique en  $O'$  et dans la base  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

**Changements de point**

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -e \cdot \gamma_{31} \cdot \cos \theta_{31} \\ 0 & -e \cdot \gamma_{31} \cdot \sin \theta_{31} \\ \gamma_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

$$\{V_{6/5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & h \cdot \beta_{65} \\ \beta_{65} & 0 \\ 0 & e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

**Équations de fermeture**

$$\begin{cases} 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \beta_{54} + \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ \gamma_{31} + \gamma_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ -e \cdot \gamma_{31} \cos \theta_{31} + 0 + 0 + h \cdot \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ -e \cdot \gamma_{31} \sin \theta_{31} + 0 + 0 + 0 + v_{54} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} + 0 + w_{43} = 0 \end{cases}$$

**Q5.** Retrouver le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Le système ci-dessus comporte 6 équations et 6 inconnues, le rang est au maximum de 5, en effet la première équation ( $0 = 0$ ) diminue le rang de 1.

Le rang du système est  $r_c = 5$ . Pour résoudre ce système il faut poser 1 paramètre (ici il est judicieux de choisir  $\gamma_{31}$ ) et on obtient :

$$\begin{cases} \gamma_{43} = -\gamma_{31} \\ \beta_{65} = \frac{e}{h} \gamma_{31} \cos \theta_{31} \\ v_{54} = \gamma_{31} \sin \theta_{31} \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \beta_{54} = -\beta_{65} \\ w_{43} = -e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} \end{cases}$$

Le système est donc mobile d'ordre  $m = 1$  (1 paramètre) et hyperstatique d'ordre  $h = 1$  ( $h = E_c - r_c$ ).

**Q6.** Proposer une modification de la liaison 3-4 permettant de rendre le mécanisme isostatique. Écrire son torseur cinématique et montrer son incidence sur les équations de ferme-

ture cinématique. Si cette modification entraîne l'apparition d'une (ou plusieurs) mobilité(s) interne(s), la (les) citer.

Pour rendre le système isostatique, il faut ajouter une mobilité de rotation suivant  $\vec{x}_1$  afin de remplacer l'équation supplémentaire  $0 = 0$ .

On nous propose de modifier la liaison 3-4, rajoutons donc une mobilité, le torseur devient :  $\{V_{4/3}\} =$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_{43} & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

Ce torseur ne correspond pas à une liaison normalisée mais se rapproche de la liaison sphère-cylindre de centre  $O'$  et d'axe  $(O', \vec{z}_1)$  soit :

$$\{V_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{43} & 0 \\ \beta_{43} & 0 \\ \gamma_{43} & w_{43} \end{Bmatrix}_{\substack{O' \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

La fermeture géométrique devient :

$$\begin{cases} \alpha_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \beta_{43} + 0 + 0 + \beta_{54} + \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \gamma_{31} + \gamma_{43} + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - e \cdot \gamma_{31} \cos \theta_{31} + 0 + 0 + h \cdot \beta_{65} + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 - e \cdot \gamma_{31} \sin \theta_{31} + 0 + 0 + 0 + v_{54} + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + e \cdot \beta_{65} \cdot \sin \theta_{31} + 0 + w_{43} = 0 \end{cases}$$

Le système à résoudre est un système à 6 équations et 8 inconnues, le rang est de 6, le système est donc mobile d'ordre  $m = 2$ . La mobilité utile est inchangée, par contre une mobilité interne est rajoutée (équation  $\beta_{43} + \beta_{54} + \beta_{65} = 0$ ), la rotation propre de la pièce 4 autour de l'axe  $(O', \vec{y}_1)$ .

**Cor. 5 : Joint de Koenig**

Sujet page 38

**Q1.** Écrire la fermeture géométrique. En déduire la relation entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  puis  $c_1$  et  $c_2$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\beta$ . Il sera judicieux d'utiliser comme base de projection, la base médiane  $\mathcal{B}_m = (\vec{s}, \vec{t}, \vec{z}_0)$  défini par la figure 1.25b.

On écrit la fermeture géométrique :

$$\vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{A}_1 + \vec{A}_1\vec{Q} + \vec{Q}\vec{A}_2 + \vec{A}_2\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{O} = \vec{0}$$

$$-a \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_1 + c_1 \cdot \vec{x}_0 + c_2 \cdot \vec{u}_0 - R \cdot \vec{y}_2 - a \cdot \vec{u}_0 = \vec{0}$$

$$(c_1 - a) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot \vec{y}_1 + (c_2 - a) \cdot \vec{u}_0 - R \cdot \vec{y}_2 = \vec{0}$$

$$(c_1 - a) \cdot \vec{x}_0 + R \cdot (\cos \theta_1 \cdot \vec{v}_0 + \sin \theta_1 \cdot \vec{z}_0) + (c_2 - a) \cdot \vec{u}_0 - R \cdot (\cos \theta_2 \cdot \vec{v}_0 + \sin \theta_2 \cdot \vec{z}_0) = \vec{0}$$

$$(c_1 - a) \cdot \vec{x}_0 + (c_2 - a) \cdot \vec{u}_0 + R \cdot \cos \theta_1 \cdot \vec{v}_0 - R \cdot \cos \theta_2 \cdot \vec{v}_0 + (R \cdot \sin \theta_1 - R \cdot \sin \theta_2) \cdot \vec{z}_0 = \vec{0}$$

**Q2.** On dit qu'un joint de transmission est homocinétique lorsque la vitesse d'entrée et sortie ne dépendent pas du temps. Le joint de Koenigs est-il homocinétique ?

La projection suivant  $\vec{z}_0$  implique  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$  modulo  $\pi$ . Le mécanisme est donc homocinétique, la loi de variation de l'entrée  $\theta_1(t)$  se retrouve à la sortie  $\theta_2(t)$ .

En projection dans la base  $\mathcal{B}_m$  :

$$(c_1 - a) (\cos \beta \vec{s} - \sin \beta \vec{t}) + (c_2 - a) (\cos \beta \vec{s} + \sin \beta \vec{t}) + R \cos \theta (\sin \beta \vec{s} + \cos \beta \vec{t}) - R \cos \theta (-\sin \beta \vec{s} + \cos \beta \vec{t}) + (R \sin \theta - R \sin \theta) \vec{z}_0 = \vec{0}$$

soit

$$((c_1 + c_2 - 2 \cdot a) \cdot \cos \beta + 2 \cdot R \cdot \cos \theta \cdot \sin \beta) \cdot \vec{s} + (-c_1 + c_2) \cdot \sin \beta \cdot \vec{t} = \vec{0}$$

d'où finalement

$$\begin{cases} c = c_2 = c_1 \\ c = a - R \cdot \cos \theta \cdot \tan \beta \end{cases}$$

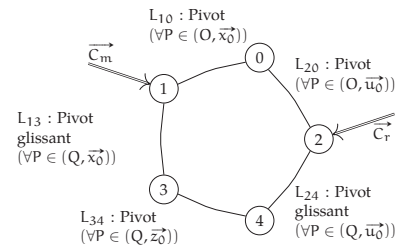
**Q3.** Quelle est la trajectoire du point Q ?

La trajectoire du point Q est toujours dans le plan  $(\vec{t}, O, \vec{z}_0)$  ( $c_1 = c_2$ ), et sa trajectoire est une ellipse (intersection d'un cylindre de rayon R avec le plan  $(\vec{t}, O, \vec{z}_0)$ ).

Le grand axe est  $2 \cdot R \cdot \tan \beta$  suivant  $\vec{t}$  et le petit axe  $2 \cdot R$

suivant  $\vec{z}_0$ .

**Q4.** Tracer le graphe des liaisons (une seule paire de biellettes), identifier les liaisons. Évaluer le degré d'hyperstativité et de mobilité.



Évaluation du degré de mobilité et d'hyperstativité.

- Nombre cyclomatique :  $\gamma = L - N + 1 = 1$ ;
- Nombre d'équations :  $E_c = 6 \cdot \gamma = 6$ ;
- Inconnues cinématiques :  $I_c = 1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$ .

Le système possède une seule mobilité  $m = 1$ , la mobilité principale du mécanisme. Il ne possède aucune mobilité interne.

On peut déduire alors le degré d'hyperstativité de la relation  $m - h = I_c - E_c$

$$h = E_c - I_c + m = 0,$$

le mécanisme est isostatique.

**Q5.** Combien d'équilibres est-il nécessaire d'écrire pour déterminer toutes les inconnues de liaison ?

Si on ne considère qu'une seule paire de biellettes, le mécanisme est constitué de  $N = 5$  solides, il est donc nécessaire d'isoler  $N - 1 = 4$  ensembles.

**Q6.** Écrire successivement le PFS sur (3), (4), (1), (2).

À chaque étape il sera judicieux de simplifier les torseurs d'actions de liaison.

**Remarque :** L'utilisation du PFS est valide, la vitesse de rotation des arbres d'entrée et de sorties sont constantes et la masse des autres pièces est négligeable.

**PFS sur {3} :**

Le solide {3} est soumis au torseur de la liaison pivot  $L_{13}$  soit  $\{A_{1 \rightarrow 3}\}$  et à celui de la liaison pivot glissant  $L_{34}$  soit  $\{A_{4 \rightarrow 3}\}$ , d'où le PFS.

$$\{A_{1 \rightarrow 3}\} + \{A_{4 \rightarrow 3}\} = \{0\}$$

Il est judicieux d'écrire le PFS en Q dans la base  $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{13} & M_{13} \\ Z_{13} & N_{13} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{43} & L_{43} \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

On détermine directement 3 inconnues et il reste 3 équations avec 6 inconnues pour cet équilibre :

$$\begin{cases} X_{43} = 0 \\ L_{43} = 0 \\ N_{13} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_{13} + Y_{43} = 0 \\ Z_{13} + Z_{43} = 0 \\ M_{13} + M_{43} = 0 \end{cases}$$

Les deux torseurs deviennent compte tenu des valeurs

nulles :

$$\{A_{1 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{13} & M_{13} \\ Z_{13} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\{A_{4 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

**PFS sur {4} :**

Le solide {4} est soumis au torseur de la liaison pivot  $L_{34}$  soit  $\{A_{3 \rightarrow 4}\}$  et à celui de la liaison pivot glissant  $L_{24}$  soit  $\{A_{2 \rightarrow 4}\}$ , d'où le PFS.

$$\{A_{3 \rightarrow 4}\} + \{A_{2 \rightarrow 4}\} = \{0\}$$

Il est judicieux d'écrire le PFS en Q dans la base  $\mathcal{B}_{u0} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & N_{24} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}} + \begin{Bmatrix} X_{34}^u & L_{34}^u \\ Y_{34}^u & M_{34}^u \\ Z_{34}^u & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

**Remarque :**  $X_{34}^u$  précise que la composante est écrite dans la base  $\mathcal{B}_{u0}$ .

On en déduit les 6 équations de l'équilibre de (2)

$$\begin{cases} X_{34}^u = 0 \\ L_{34}^u = 0 \\ N_{24} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Y_{24} + Y_{34}^u = 0 \\ Z_{24} + Z_{34}^u = 0 \\ M_{24} + M_{34}^u = 0 \end{cases}$$

Les deux torseurs, compte tenu des valeurs nulles, deviennent :

$$\{A_{2 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{24} & M_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}}$$

$$\{A_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{34}^u & M_{34}^u \\ Z_{34}^u & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}}$$

Le torseur  $\{A_{4 \rightarrow 3}\} = -\{A_{3 \rightarrow 4}\}$  a déjà été partiellement déterminé dans l'équilibre de (3), en écrivant cette égalité dans la même base ( $\mathcal{B}_0$ ). Dans cette base le torseur  $\{A_{3 \rightarrow 4}\}$  devient

$$\{A_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} -Y_{34}^u \cdot \sin \alpha & -M_{34}^u \cdot \sin \alpha \\ Y_{34}^u \cdot \cos \alpha & M_{34}^u \cdot \cos \alpha \\ Z_{34}^u & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

$$\{A_{4 \rightarrow 3}\} = -\{A_{3 \rightarrow 4}\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = -\begin{Bmatrix} -Y_{34}^u \cdot \sin \alpha & -M_{34}^u \cdot \sin \alpha \\ Y_{34}^u \cdot \cos \alpha & M_{34}^u \cdot \cos \alpha \\ Z_{34}^u & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

Le torseur  $\{A_{4 \rightarrow 3}\}$  devient alors simplement :

$$\{A_{4 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Z_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}$$

**PFS sur {1} :**

Le solide 1 est soumis au torseur de la liaison  $L_{01}$  noté  $\{A_{0 \rightarrow 1}\}$  et celui de la liaison  $L_{31}$  noté  $\{A_{3 \rightarrow 1}\}$  et à l'action mécanique du couple moteur  $\{e_{m \rightarrow 1}\}$ , d'où le PFS

$$\{A_{0 \rightarrow 1}\} + \{A_{3 \rightarrow 1}\} + \{e_{m \rightarrow 1}\} = \{0\}.$$

Il est nécessaire de déplacer le torseur de la liaison  $L_{31}$  de Q à  $O_1$  avec  $O_1\vec{Q} = R \cdot \vec{y}_1 + c \cdot \vec{x}_0$ , finalement le PFS s'écrit en  $O_1$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

$$\begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} + \begin{Bmatrix} X_{01} & 0 \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} - \begin{Bmatrix} 0 & R \cdot Z_{13} \cdot \cos \theta \\ 0 & -c \cdot Z_{13} \\ Z_{13} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} X_{01} = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ N_{01} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Z_{01} - Z_{13} = 0 \\ -R \cdot Z_{13} \cdot \cos \theta + C_m = 0 \\ M_{01} + c \cdot Z_{13} = 0 \end{cases}$$

**PFS sur {2} :**

Il ne reste plus qu'à isoler le manchon de sortie (2). Le PFS s'écrit :

$$\{A_{0 \rightarrow 2}\} + \{A_{4 \rightarrow 2}\} + \{e_{r \rightarrow 2}\} = \{0\}.$$

Il faut déplacer le torseur de la liaison  $L_{24}$  de Q à  $O_2$ ,  $O_2\vec{Q} = R \cdot \vec{y}_2 - c \cdot \vec{u}_0$ , le PFS s'écrit donc en  $O_2$  dans la base  $\mathcal{B}_{u0} = (\vec{u}_0, \vec{v}_0, \vec{z}_0)$  :

$$\begin{Bmatrix} 0 & C_r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}} + \begin{Bmatrix} X_{02} & 0 \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}} - \begin{Bmatrix} 0 & R \cdot Z_{24} \cdot \cos \theta \\ 0 & c \cdot Z_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_{u0}} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

soit

$$\begin{cases} X_{02} = 0 \\ Y_{02} = 0 \\ N_{02} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Z_{02} - Z_{24} = 0 \\ -R \cdot Z_{24} \cdot \cos \theta + C_r = 0 \\ M_{02} - c \cdot Z_{24} = 0 \end{cases}$$

**En conclusion :**

Nous avons donc déterminé directement à partir des dif-

férents isolements 16 inconnues :

$$\begin{cases} Y_{13} = 0 \\ M_{13} = 0 \\ N_{13} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_{24} = 0 \\ M_{24} = 0 \\ N_{24} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{43} = 0 \\ Y_{43} = 0 \\ L_{43} = 0 \\ M_{43} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{01} = 0 \\ Y_{01} = 0 \\ N_{01} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{02} = 0 \\ Y_{02} = 0 \\ N_{02} = 0 \end{cases}$$

Il reste 8 équations avec 7 inconnues :

$$\begin{cases} Z_{13} + Z_{43} = 0 \\ Z_{13} + Z_{24} = 0 \\ Z_{01} - Z_{13} = 0 \\ Z_{02} - Z_{24} = 0 \\ M_{01} + c \cdot Z_{13} = 0 \\ M_{02} - c \cdot Z_{24} = 0 \\ -R \cdot Z_{13} \cdot \cos \theta + C_m = 0 \\ -R \cdot Z_{24} \cdot \cos \theta + C_r = 0 \end{cases}$$

Il est possible de déterminer toutes les inconnues en fonction de  $C_m$  et d'établir la relation entre l'entrée ( $C_m$ ) et la sortie ( $C_r$ ) :

$$\begin{cases} Z_{13} = C_m \frac{1}{R \cdot \cos \theta} \\ Z_{43} = Z_{24} = Z_{02} = -Z_{13} \\ Z_{01} = Z_{13} \\ M_{01} = M_{02} = -c \cdot Z_{13} \end{cases}$$

d'où la relation E/S :

$$C_r = -C_m$$

Le mécanisme est donc isostatique (toutes les inconnues de liaison ont été déterminées),  $h = 0$ , et de mobilité  $m = 1$  (une seule relation d'entrée sortie).

**Remarque :** On constate que  $Z_{13}$  a une valeur infinie pour  $\theta = 90^\circ$ , cela devrait entraîner la destruction de la liaison d'où la nécessité d'installer plusieurs paires de biellettes pour que les autres liaisons absorbent le couple à transmettre.

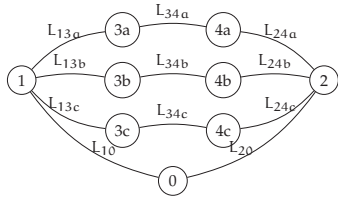
**Q7.** Que se passe-t-il si  $\alpha = 0^\circ$  ?

Si  $\alpha = 0^\circ$  les deux biellettes sont alignées et parallèles à l'axe des deux arbres. Les deux biellettes ont alors la possibilité de tourner autour de leur axe et de se déplacer en translation. Le mécanisme possède alors deux mobilités internes supplémentaires. Ces mobilités doivent être interdites pour un fonctionnement correct du joint.

**Q8.** Évaluer sans calcul le degré de mobilité et le degré d'hyperstativité.

On trace le graphe de structure.





Le mécanisme comporte maintenant  $N = 9$  pièces,  $L = 11$  liaisons (5 liaisons pivot -  $L_{10}, L_{20}, L_{34a}, L_{34b}, L_{34c}$  - et 6

liaisons pivot glissant -  $L_{13a}, L_{13b}, L_{13c}, L_{24a}, L_{24b}, L_{24c}$  -) soit  $L_c = 17$  inconnues, avec  $\gamma = L - N + 1 = 3$   $E_c = \gamma \cdot 6 = 18$ .

Le mécanisme est toujours mobile de degré  $m = 1$ , avec  $m - h = L_c - E_c$  on déduit que le mécanisme est hyperstatique de degré  $h = 2$ .

**Q9.** Pouvez-vous identifier l'origine de l'hyperstativité?

L'hyperstativité est due aux trois liaisons pivot entre les biellettes, pour rendre le système isostatique, il faut transformer deux de ces liaisons en liaison pivot glissant mais ici cela ne doit pas être réalisé car on risque de détruire la liaison pivot restante (Cf. la remarque plus haut).

**Cor. 6 : Sinusmatic**

Sujet page 39

**Q1.** Déterminer l'expression littérale du rapport de réduction  $\rho_1 = \frac{\omega_{As/bati}}{\omega_{M/bati}}$  de ce réducteur en fonction du nombre de dents  $Z$  de chacune des roues dentées.

Nous avons à faire à un réducteur simple, tous les axes sont parallèles et en pivot par rapport au bâti. On peut appliquer la formule classique des rapports d'engrenage

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\omega_{As/bati}}{\omega_{M/bati}} = (-1)^n \cdot \frac{\text{Produits des roues menantes}}{\text{produit des roues menes}} \\ &= (-1)^4 \cdot \frac{Z_m \cdot Z_2 \cdot Z_4 \cdot Z_6}{Z_1 \cdot Z_3 \cdot Z_5 \cdot Z_8} \\ &= \frac{17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17}{133 \cdot 133 \cdot 100 \cdot 67} \approx 0,000\,083 \end{aligned}$$

**Q2.** Sachant que l'ouverture doit se faire en moins de 5s, Déterminer la vitesse de rotation de l'arbre moteur.

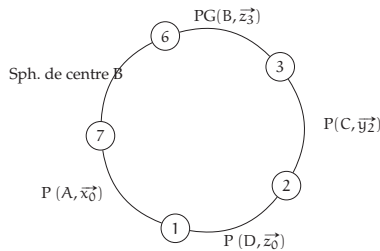
Le cycle d'ouverture fermeture dure donc :10s soit  $\omega_{As/bati} = 0,1$  tr/s

finalement :  $\omega_{M/bati} = \omega_{As/bati} \cdot \frac{1}{\rho_1} \approx 1\,200$  tr/s = 72 000 tr/min

Valeur relativement importante, il faudra vérifier la possibilité d'un moteur CC ayant ces caractéristiques!

**Q2a.** Donner en respectant l'ordre ci-dessous le nom, les caractéristiques et le torseur cinématique des liaisons suivantes :  $L_{7/1}, L_{7/6}, L_{6/3}, L_{3/2}, L_{2/1}$ .

- $L_{7/1}$  : pivot d'axe  $(A, \vec{x}_0)$ ,  $\{V_{7/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{71} \cdot \vec{x}_0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{VP \in (A, \vec{x}_0)}$  ;
- $L_{6/3}$  : pivot glissant d'axe  $(B, \vec{z}_3)$ ,  $\{V_{6/3}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{63} \cdot \vec{z}_3 \\ V_{63} \cdot \vec{z}_3 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{VP \in (B, \vec{z}_3)}$  ;
- $L_{7/6}$  : Sphérique de centre B,  $\{V_{7/6}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{matrix} \right\}_{VB}$  ;
- $L_{3/2}$  : pivot d'axe  $(C, \vec{y}_2)$ ,  $\{V_{3/2}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{32} \cdot \vec{y}_2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{VP \in (C, \vec{y}_2)}$  ;
- $L_{2/1}$  : pivot d'axe  $(D, \vec{z}_0)$ ,  $\{V_{2/1}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{21} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{VP \in (D, \vec{z}_0)}$ .



**Q2b.** Tracer le graphe de structure

**Q3.** Fermeture géométrique

**Q3a.** Écrire les trois équations scalaires de la fermeture géométrique.

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} &= \vec{0} \\ a \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \vec{z}_7 + b \cdot \vec{z}_3 - h \cdot \vec{x}_0 &= \vec{0} \\ a \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \cos \alpha \cdot \vec{z}_0 - r \cdot \sin \alpha \cdot \vec{y}_0 + b \cdot \cos \delta \cdot \vec{z}_2 + b \cdot \sin \delta \cdot \vec{x}_2 - h \cdot \vec{x}_0 &= \vec{0} \\ a \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \cos \alpha \cdot \vec{z}_0 - r \cdot \sin \alpha \cdot \vec{y}_0 + b \cdot \cos \delta \cdot \vec{z}_0 + b \cdot \sin \delta \cdot (\cos \beta \cdot \vec{x}_0 + \sin \beta \cdot \vec{y}_0) - h \cdot \vec{x}_0 &= \vec{0} \\ a - h + b \cdot \sin \delta \cdot \cos \beta &= 0 \\ -r \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin \delta \cdot \sin \beta &= 0 \\ -r \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos \delta &= 0 \end{aligned}$$

**Q3b.** En déduire la relation donnant  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} -r \cdot \sin \alpha &= -b \cdot \sin \delta \cdot \sin \beta \Rightarrow \tan \beta = \frac{r \cdot \sin \alpha}{h - a} \\ a - h &= -b \cdot \sin \delta \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

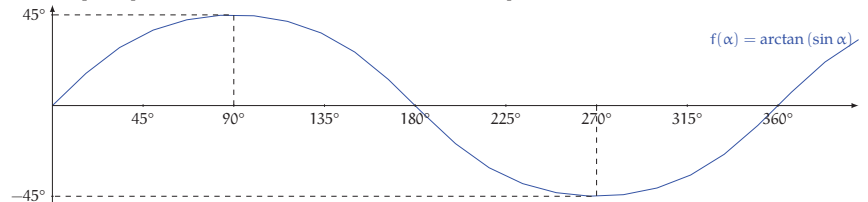
et

$$\cos \delta = \frac{r}{b} \cdot \cos \alpha$$

Pour la suite on suppose que  $h - a = r$ .

$$\tan \beta = \sin \alpha \Rightarrow \beta = \arctan(\sin \alpha)$$

**Q4.** Justifier que les positions barrières ouvertes et fermées sont obtenues pour  $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 270^\circ$ .



Les positions ouverte et fermée de la barrière doivent correspondre à des positions extrêmes du mouvement d'entraînement, soit les angles  $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 270^\circ$ . La barrière aura bien une amplitude angulaire de  $90^\circ$  mais entre  $-45^\circ$  et  $45^\circ$ , si on veut obtenir un mouvement entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , il faut décaler angulairement la barrière d'un angle constant  $\beta_0 = 45^\circ$ .

**Q5.** Liaison équivalente

**Q5a.** Déterminer le torseur cinématique de la liaison  $L_{7/3}$ , équivalente aux liaisons  $L_{7/6}$  et  $L_{6/3}$ .

Les deux liaisons sont en série, il est plus rapide de faire ici une étude cinématique, on écrit les deux torseurs en B.

$$\{V_{7/3}\} = \{V_{7/6}\} + \{V_{6/3}\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z + \omega_{63} & V_{63} \end{matrix} \right\}_{B(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

**Q5b.** Donner le nom de cette liaison et ses caractéristiques.

On reconnaît une liaison sphère cylindre de centre B et d'axe  $(B, \vec{z}_3)$ .

**Q5c.** En déduire que ce mécanisme possède donc une mobilité interne, préciser la nature de la mobilité interne.

On constate, à partir du torseur cinématique obtenue, que l'association de ces deux liaisons (pivot glissant et sphérique) possède une mobilité interne, en effet, la liaisons équivalente sphère cylindre ne possède que 4 degré de liberté alors que la liaison composée en possède 5. Il y a deux rotations possibles autour de l'axe  $(B, \vec{z}_3)$  alors qu'une seule est nécessaire.

La rotule peut pivoter librement autour de l'axe  $(B, \vec{z}_3)$  sans perturber le fonctionnement du mécanisme. En conclusion

$$m_i = 1$$

**Q6.** Mobilité et hyperstativité

**Q6a.** Évaluer le degré de mobilité du mécanisme.

ous avons vu au-dessus que  $m_i = 1$ , la loi d'entrée sortie géométrique montre qu'une relation lie  $\alpha$  et  $\beta$  et  $\alpha$  et  $\delta$ . nous avons donc  $m_i = 1$  soit  $m = 1 + 1 = 2$ .

**Q6b.** En déduire le degré d'hyperstativité.

en appliquant la relation entre la mobilité et l'hyperstaticité

$$m - h = I_c - E_c \Rightarrow 2 - h = 8 - 6 \Rightarrow h = 0$$

Le mécanisme est isostatique.

**Q7.** Écrire la fermeture cinématique. Retrouvez le degré de mobilité et d'hyperstaticité.

La fermeture cinématique est assez rapide à écrire, il faut constater que toutes les pivots et la pivot glissante sont concurrentes en C. il n'y a donc à déplacer que le toseur cinématique de la liaison sphérique.

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C \in 7/6} &= (\omega_x \cdot \vec{x}_3 + \omega_y \cdot \vec{y}_3 + \omega_z \cdot \vec{z}_3) \wedge b \cdot \vec{z}_3 \\ \vec{V}_{C \in 7/6} &= -b \cdot \omega_x \cdot \vec{y}_3 + b \cdot \omega_y \cdot \vec{x}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\{V_{7/6}\} + \{V_{6/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} - \{V_{7/1}\} = \{0\} \\ &\begin{Bmatrix} \omega_x & b \cdot \omega_y \\ \omega_y & -b \cdot \omega_x \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}} + \begin{Bmatrix} \omega_{63} \cdot \vec{z}_3 \\ \omega_{63} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} \omega_{32} \cdot \vec{y}_3 \\ 0 \end{Bmatrix}_C + \begin{Bmatrix} \omega_{21} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C - \begin{Bmatrix} \omega_{71} \cdot \vec{x}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C = \{0\} \end{aligned}$$

On projette dans la base  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \cos \beta \cdot \vec{x}_2 - \sin \beta \cdot \vec{y}_3 = \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \vec{x}_3 + (\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta) \cdot \vec{y}_3 \\ \vec{z}_0 &= \vec{z}_2 = \cos \delta \cdot \vec{z}_3 - \sin \delta \cdot \vec{x}(3) \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_x & b \cdot \omega_y \\ \omega_y & -b \cdot \omega_x \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_3}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{63} & V_{63} \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_3}} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_3}} + \begin{Bmatrix} -\omega_{21} \cdot \sin \delta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_3}} - \begin{Bmatrix} \omega_{71} \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta & 0 \\ \omega_{71} \cdot (\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta) & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_3}} = \{0\}$$

On trouve le système de 6 équations suivant avec 8 inconnues :

$$\begin{aligned} \omega_x - \omega_{21} \cdot \sin \delta - \omega_{71} \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta &= 0 \\ \omega_y + \omega_{32} - \omega_{71} \cdot (\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta) &= 0 \\ \omega_z + \omega_{63} + \omega_{21} \cdot \cos \delta &= 0 \\ b \cdot \omega_y &= 0 \\ -b \cdot \omega_x &= 0 \\ V_{63} &= 0 \end{aligned}$$

le système se simplifie rapidement en

$$\begin{aligned} -\omega_{21} \cdot \sin \delta - \omega_{71} \cdot \cos \beta \cdot \cos \delta &= 0 \\ \omega_{32} - \omega_{71} \cdot (\cos \beta \cdot \sin \delta - \sin \beta) &= 0 \\ \omega_z + \omega_{63} + \omega_{21} \cdot \cos \delta &= 0 \end{aligned}$$

Il reste finalement un système de 3 équations à 5 inconnues, Pour résoudre, il faut fixer deux paramètres par exemple  $\omega_z$  (la mobilité interne) et  $\omega_{71}$  le mouvement d'entraînement du mécanisme.

On ne demande pas ici d'aller plus loin mais en recombinaison avec les relations géométriques déterminées plus haut, on peut déterminer les relations entre les vitesses en faisant disparaître  $\delta$  et  $\beta$ .

$$\begin{aligned} a - h + b \cdot \sin \delta \cdot \cos \beta &= 0 \\ -r \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin \delta \cdot \sin \beta &= 0 \\ -r \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos \delta &= 0 \end{aligned}$$

**Q8.** Étude de l'irréversibilité du mouvement

En position barrière fermée ou ouverte ( $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 270^\circ$ ), le moteur électrique n'est plus alimenté. Une action mécanique exercée sur la barrière ne doit pas mettre en mouvement le plateau 7 et le moteur.

— Le poids de la barrière et des autres solides est négligée.

— L'effort extérieur sur l'ensemble {barrière, arbre (2)} est modélisé par un couple  $\{A_{ext \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ M \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\mathbb{P}}$ .

— L'action du couple moteur ramené sur le plateau (7) est noté  $\{A_{A_s \rightarrow 7}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_{\mathbb{P}}$ .

— Le torseur d'inter-efforts du plateau (7) sur la rotule (6) est noté  $\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{76} & 0 \\ Y_{76} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{B \\ \mathbb{B}_3}}$  dans la base  $\mathbb{B}_3$ .

**Q8a.** En isolant (6), justifier la forme du torseur  $\{A_{7 \rightarrow 6}\}$  la rotule (6) est soumise à deux actions mécaniques

— l'action transmissible par la liaison sphérique  $\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{76} & 0 \\ Y_{76} & 0 \\ Z_{76} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{B \\ \mathbb{B}_3}}$

— l'action transmissible par la liaison pivot glissant  $\{A_{3 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{36} & L_{36} \\ Y_{36} & M_{36} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\mathbb{P} \in (B, \vec{z}_3)_{\mathbb{B}_3}}$

Le PFS sur 3 s'écrit en B dans  $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

$$\left\{ \begin{matrix} X_{76} & 0 \\ Y_{76} & 0 \\ Z_{76} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{B \\ \mathbb{B}_3}} + \left\{ \begin{matrix} X_{36} & L_{36} \\ Y_{36} & M_{36} \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\mathbb{P} \in (B, \vec{z}_3)_{\mathbb{B}_3}} = \{0\}$$

On obtient donc :  $Z_{76} = 0$ ;  $L_{36} = 0$  et  $M_{36} = 0$ . finalement on trouve la forme recherchée :  $\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{76} & 0 \\ Y_{76} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{B \\ \mathbb{B}_3}}$ .

**Q8b.** En isolant l'ensemble {2,3,6}, déterminer les composantes du torseur d'inter-efforts  $\{A_{7 \rightarrow 6}\}$  en fonction de M.

l'ensemble {2,3,6} est soumis

— l'action transmissible par la liaison sphérique  $\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{76} & 0 \\ Y_{76} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{B \\ \mathbb{B}_3}}$ .

— l'action transmissible par la liaison pivot entre 1 et 2  $\{A_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{C \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}}$

— l'action mécanique extérieure sur (2)  $\{A_{ext \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ M \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\mathbb{P}}$ .

On choisit d'écrire le PFS en C dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{aligned} \vec{R}_{76} &= X_{76} \cdot \vec{x}_3 + Y_{76} \cdot \vec{y}_3 \\ &= X_{76} \cdot (\cos \delta \cdot \vec{x}_2 - \sin \delta \cdot \vec{z}_0) + Y_{76} \cdot (\cos \beta \cdot \vec{y}_0 - \sin \beta \cdot \vec{x}_0) \\ &= X_{76} \cdot (\cos \delta \cdot (\cos \beta \cdot \vec{x}_0 + \sin \beta \cdot \vec{y}_0) - \sin \delta \cdot \vec{z}_0) + Y_{76} \cdot (\cos \beta \cdot \vec{y}_0 - \sin \beta \cdot \vec{x}_0) \\ &= (X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \cos \beta - Y_{76} \cdot \sin \beta) \cdot \vec{x}_0 + (X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + Y_{76} \cdot \cos \beta) \cdot \vec{y}_0 - X_{76} \cdot \sin \delta \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_{C, 7 \rightarrow 6} &= \vec{0} - b \cdot \vec{z}_3 \wedge (X_{76} \cdot \vec{x}_3 + Y_{76} \cdot \vec{y}_3) \\ &= b \cdot Y_{76} \cdot \vec{x}_3 - b \cdot X_{76} \cdot \vec{y}_3 \\ &= b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \vec{x}_2 - b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta \vec{z}_2 - b \cdot X_{76} \cdot \vec{y}_2 \\ &= b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta \cdot \vec{x}_0 + b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta \cdot \vec{y}_0 - b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta \cdot \vec{z}_0 - b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta \cdot \vec{y}_0 + b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta \cdot \vec{x}_0 \\ &= (b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta + b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta) \cdot \vec{x}_0 + (b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta - b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta) \cdot \vec{y}_0 - b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

$$\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \cos \beta - Y_{76} \cdot \sin \beta & b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta + b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta \\ X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + Y_{76} \cdot \cos \beta & b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta - b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta \\ -X_{76} \cdot \sin \delta & -b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta \end{matrix} \right\}_{\substack{C \\ \mathbb{B}_0}}$$

le PFS s'écrit :

$$\begin{cases} X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \cos \beta - Y_{76} \cdot \sin \beta + X_{12} = 0 \\ X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + Y_{76} \cdot \cos \beta + Y_{12} = 0 \\ -X_{76} \cdot \sin \delta + Z_{12} = 0 \\ L_{12} + b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta + b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta = 0 \\ M_{12} + b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta - b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta = 0 \\ M - b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta = 0 \end{cases}$$

dans la position de l'étude ( $\alpha = 90^\circ$  et  $\alpha = 270^\circ$ ) avec les résultats de l'étude géométrique

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \frac{r}{b} \cdot \cos \alpha \\ \tan \beta &= \sin \alpha \end{aligned}$$

pour  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\cos \delta = 0$  et  $\sin \delta = \pm 1$ . on montre aussi que  $b = \sqrt{2} \cdot r$  le système devient :

$$\begin{cases} -Y_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + X_{12} = 0 \\ +Y_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_{12} = 0 \\ -X_{76} + Z_{12} = 0 \\ L_{12} + b \cdot X_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ M_{12} - b \cdot X_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ M - b \cdot Y_{76} = 0 \end{cases}$$

Il reste 7 inconnues pour 6 équations. Il est possible de déterminer  $Y_{76}$  en fonction de  $M$  ( $Y_{76} = \frac{M}{b} = \frac{M}{\sqrt{2} \cdot r}$ ) mais pas  $X_{76}$ .

On obtient finalement que l'action transmissible par la liaison sphérique pour la position  $\alpha = 90^\circ$  est  $\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} X_{76} \\ \frac{M}{\sqrt{2} \cdot r} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B_3}$ .

$X_{76}$  ne peut être déterminé par cet équilibre.

Q9. En isolant le plateau (7), montrer que lorsque la barrière est ouverte ou fermée, il n'est pas nécessaire de maintenir un couple moteur  $C_m$  pour interdire l'ouverture ou la fermeture.

Le plateau est soumis

- l'action de 6 sur 7
- l'action transmissible par la liaison pivot de 1 sur 7
- le couple moteur

On écrit le PFS en C dans  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$-\begin{Bmatrix} X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \cos \beta - Y_{76} \cdot \sin \beta & b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta + b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta \\ X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + Y_{76} \cdot \cos \beta & b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta - b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta \\ -X_{76} \cdot \sin \delta & -b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta \end{Bmatrix}_{C_{B_0}} + \begin{Bmatrix} X_{17} & 0 \\ Y_{17} & M_{17} \\ Z_{17} & N_{17} \end{Bmatrix}_{C_{B_0}} + \begin{Bmatrix} 0 & C_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C_{B_0}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -(X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \cos \beta - Y_{76} \cdot \sin \beta) + X_{17} = 0 \\ -(X_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + Y_{76} \cdot \cos \beta) + Y_{17} = 0 \\ X_{76} \cdot \sin \delta + Z_{17} = 0 \\ -b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cos \beta - b \cdot X_{76} \cdot \sin \beta + C_m = 0 \\ -b \cdot Y_{76} \cdot \cos \delta \cdot \sin \beta + b \cdot X_{76} \cdot \cos \beta + M_{17} = 0 \\ b \cdot Y_{76} \cdot \sin \delta + N_{17} = 0 \end{cases}$$

pour  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\cos \delta = 0$  et  $\sin \delta = \pm 1$ .

$$\begin{cases} Y_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + X_{17} = 0 \\ -Y_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_{17} = 0 \\ X_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + Z_{17} = 0 \\ -b \cdot X_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C_m = 0 \\ +b \cdot X_{76} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + M_{17} = 0 \\ b \cdot Y_{76} + N_{17} = 0 \end{cases}$$

Cet équilibre permet de déterminer  $X_{76} = \frac{2 \cdot C_m}{\sqrt{2} \cdot b} = \frac{C_m}{r}$

On obtient finalement le torseur des actions mécaniques transmissible par la liaison sphérique pour  $\alpha = 90^\circ$  en fonction de  $C_m$  et  $M$ . est

$$\{A_{7 \rightarrow 6}\} = \begin{Bmatrix} X_{76} = \frac{C_m}{r} & 0 \\ Y_{76} = \frac{M}{\sqrt{2} \cdot r} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_3}$$

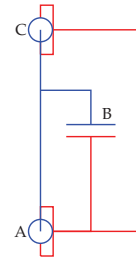
Dans cette position particulière (on montre de même pour la position  $\alpha = 270^\circ$ ) l'action mécanique extérieure  $M$  ne « remonte » pas jusque au moteur, elle est entièrement encaissée par la composante  $Y_{76}$  de la liaison sphérique. Manipuler la barrière dans cette position suppose donc de détruire la liaison.

Cor. 7 : Groupe d'exploitation hydraulique

Sujet page 42

Q1. Donner le nom du modèle retenu et le torseur cinématique associés à chacune des liaisons 2-3, 2-4 et 2-5.

On modélise chaque liaison « cylindrique courte » par une liaison sphère-cylindre (linéaire annulaire) centrée respectivement en A et en C d'axe  $(A, \vec{z})$ , et la liaison plane par une liaison appui plan de normale  $\vec{z}$ .

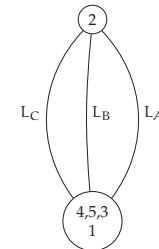


—  $L_1$  - Sphère - cylindre en A :  $\{V_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{xA} & 0 \\ \omega_{yA} & 0 \\ \omega_{zA} & V_{Az} \end{Bmatrix}_A$

—  $L_C$  - Sphère - cylindre en C :  $\{V_{2/4}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{xC} & 0 \\ \omega_{yC} & 0 \\ \omega_{zC} & V_{Cz} \end{Bmatrix}_C$

—  $L_B$  - Appui plan de normale  $\vec{z}_0$  :  $\{V_{2/5}\} = \begin{Bmatrix} 0 & V_{Cz} \\ 0 & V_{Cy} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{Bmatrix}_{VP}$

Q3. Tracer le graphe des liaisons, déterminer le degré d'hyperstatisme du montage bâti - rotor et donner le degré de mobilité. Quel est l'intérêt de cette solution ?



Q2. Tracer un schéma cinématique représentant ces trois liaisons.

Les trois paliers et le bâti sont dans la même classe équivalente.

Q4. Déterminer le torseur cinématique de la liaison équivalente 0-2.



Les trois liaisons sont parallèles, la liaison équivalente est telle que :

$$\{V_{2/3}\} = \{V_{2/4}\} = \{V_{2/5}\} = \{V_{e2/1}\}$$

Commençons par évaluer les deux torseurs en A et B.

Le torseur de la liaison appui-plan est identique en tout point. En A dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  on a donc :

$$\begin{cases} \{V_{2/3}\} = \{V_{2/5}\} = \{V_{e2/1}\} \\ \begin{pmatrix} 0 & V_{Cx} \\ 0 & V_{Cy} \\ \omega_{Cz} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{xA} & 0 \\ \omega_{yA} & 0 \\ \omega_{zA} & V_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{eqx} & V_{eqx} \\ \omega_{eqy} & V_{eqy} \\ \omega_{eqz} & V_{eqz} \end{pmatrix} \end{cases}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \omega_{xA} &= 0 = \omega_{eqx} \\ \omega_{yA} &= 0 = \omega_{eqy} \\ V_x &= 0 = V_{eqx} \\ V_y &= 0 = V_{eqy} \\ V_{Az} &= 0 = V_{eqz} \end{aligned}$$

**Cor. 8 : Omnirob**

**Q1.** Proposer une modélisation pour les deux liaisons en A et B. Préciser les torseurs cinématiques et d'actions transmissibles. Donner la liaison équivalente entre un seul galet et le rail de guidage (bâti).

D'après le sujet on peut modéliser les contacts en A et B par deux liaisons sphère-plan (ponctuelle).

— En A : Sphère plan de normale  $(A_1, \vec{y}_1^T)$ .

$$\{V_{G_1/0}^A\} = \begin{cases} \omega_{xA} & V_{xA} \\ \omega_{yA} & 0 \\ \omega_{zA} & V_{zA} \end{cases}_{\forall P \in (A_1, \vec{y}_1^T)}$$

$$\{A_{0 \rightarrow G_1}^A\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ V_A & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall P \in (A_1, \vec{y}_1^T)}$$

— En A : Sphère plan de normale  $(B_1, \vec{x}_1^T)$ .

$$\{V_{G_1/0}^B\} = \begin{cases} \omega_{xB} & 0 \\ \omega_{yB} & V_{yB} \\ \omega_{zB} & V_{zB} \end{cases}_{\forall P \in (B_1, \vec{x}_1^T)}$$

$$\{A_{0 \rightarrow G_1}^B\} = \begin{cases} X_B & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{\forall P \in (B_1, \vec{x}_1^T)}$$

On détermine la liaison équivalente à partir de l'étude cinématique. On doit avoir :

$$\{V_{G_1/0}^A\} = \{V_{G_1/0}^B\} = \{V_{G_1/0}^{eq}\}$$

Il reste donc :

$$\{V_{e2/1}\} = \begin{cases} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{eqz} & 0 \end{cases}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_A}$$

On peut faire la même étude entre C et B. La liaison équivalente est donc une liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_0)$ .

**Q5.** Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme. Quel est l'intérêt de cette réalisation ?

On a vu dans le calcul précédent que pour réaliser une liaison pivot, il suffisait d'une liaison appui-plan et d'une liaison sphère-cylindre. On peut donc conclure qu'il y a une liaison sphère-cylindre de trop.

Le degré d'hyperstaticité est donc de  $h = 2$  correspondant aux deux composantes du torseur des actions transmissibles de la liaison sphère-cylindre.

$$\{A_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{cases} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_C}$$

L'appui-plan permet de supporter la masse de la turbine pelton, les deux paliers permettent à la fois d'absorber les efforts radiaux et les déformations de l'arbre.

Sujet page 43

On écrit cette égalité en  $C_1$  (la forme des torseurs ne change pas car  $C_1$  est à l'intersection des deux normales).

$$\begin{cases} \{V_{G_1/0}^A\} = \{V_{G_1/0}^B\} \\ \begin{cases} \omega_{xA} & V_{xA} \\ \omega_{yA} & 0 \\ \omega_{zA} & V_{zA} \end{cases}_{C_1} = \begin{cases} \omega_{xB} & 0 \\ \omega_{yB} & V_{yB} \\ \omega_{zB} & V_{zB} \end{cases}_{C_1} \end{cases}$$

On trouve

$$\begin{aligned} V_{xA} &= 0 \\ V_{yB} &= 0 \end{aligned}$$

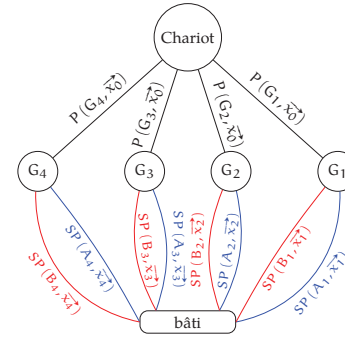
et finalement

$$\{V_{G_1/0}^{eq}\} = \begin{cases} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_z \\ \omega_z & V_z \end{cases}_{C_1}$$

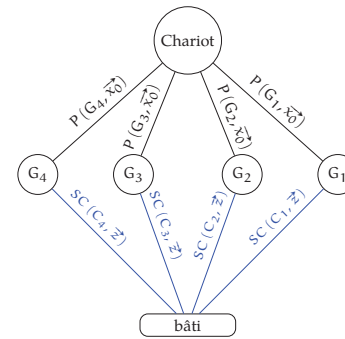
soit une liaison sphère-cylindre de direction  $(C_1, \vec{z})$ .

**Q2.** Tracer le graphe de structure du mécanisme sans la prise en compte des liaisons équivalentes puis avec les liaisons équivalentes.

— sans prise en compte des liaisons équivalentes



— Avec prise en compte



**Q3.** Déterminer la liaison équivalente entre le chariot et le rail pour un galet.

On a, pour chaque galet, deux liaisons en série, une liaison pivot d'axe  $(G_i, \vec{x}_0)$  et une liaison sphère cylindre de direction  $(C_i, \vec{z})$  (avec  $i = \{1, 2, 3, 4\}$ ).

Il suffit de sommer les deux torseurs.

$$\{V_{2/0}^{G_1}\} = \{V_{2/G_1}^{G_1}\} + \{V_{G_1/0}^{G_1}\}$$

On pose  $\vec{C}_1 G_1 = a \cdot \vec{y}_0$

$$\{V_{2/G_1}\} = \begin{cases} \omega_{2G_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_{G_1}}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C_1 \in 2/G_1} &= \vec{v} + \omega_{2G_1} \cdot \vec{x}_0 \wedge a \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{V}_{C_1 \in 2/G_1} &= a \cdot \omega_{2G_1} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

La somme des deux torseurs en  $C_1$  :

$$\{V_{2/0}^{G_1}\} = \begin{cases} \omega_{2G_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a \cdot \omega_{2G_1} \end{cases}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_{C_1}} + \begin{cases} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z \end{cases}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_{C_1}}$$

soit

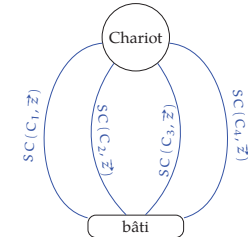
$$\{V_{2/0}^{G_1}\} = \begin{cases} \omega_x + \omega_{2G_1} & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z + a \cdot \omega_{2G_1} \end{cases}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_{C_1}}$$

On retrouve une liaison sphère cylindre de direction  $(C_1, \vec{z}_0)$ .

Ce torseur à la même forme dans la base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , pour la suite on note chaque torseur :

$$\{V_{2/0}^{G_i}\} = \begin{cases} \omega_{x_i} & 0 \\ \omega_{y_i} & 0 \\ \omega_{z_i} & V_{z_i} \end{cases}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_C}$$

**Q4.** Que devient le graphe de structure ?



**Q5.** Déduire de la question précédente la liaison équivalente entre le chariot et le bâti.

Montrons que la liaison équivalente est une liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$ .

La liaison entre le chariot et la glissière est donc composée de 4 liaisons équivalentes sphère-cylindre en parallèle en  $G_1, G_2, G_3$  et  $G_4$ .

Le torseur équivalent est obtenu en égalant les 4 torseurs.

$$\{V_{2/0}^{eq}\} = \{V_{2/0}^{G_1}\} = \{V_{2/0}^{G_2}\} = \{V_{2/0}^{G_3}\} = \{V_{2/0}^{G_4}\}$$

On écrit ces 4 liaisons au point  $C_1$ .

Commençons par déplacer le torseur équivalent du galet  $G_2$ .

On pose  $\vec{C}_1 C_2 = h \cdot \vec{y}_0$

$$\{V_{2/0}^{G_2}\} = \begin{cases} \omega_{x_2} & 0 \\ \omega_{y_2} & 0 \\ \omega_{z_2} & V_{z_2} \end{cases}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_C}$$

On pose  $\vec{V}_{C_1 \in 2/0}^{G_2}$  la vitesse en  $C_1$  calculée pour le torseur cinématique de  $\{V_{2/0}^{G_2}\}$ .

$$\begin{aligned} \vec{V}_{C_1 \in 2/0}^{G_2} &= \vec{V}_{C_2 \in 2/0}^{G_2} + \vec{\Omega}_{2/0}^{G_2} \wedge \vec{C}_1 C_2 \\ \vec{V}_{C_1 \in 2/0}^{G_2} &= V_{z_2} \end{aligned}$$

$$+ (\omega_{x_2} \cdot \vec{x}_0 + \omega_{y_2} \cdot \vec{y}_0 + \omega_{z_2} \cdot \vec{z}_0) \wedge (h \cdot \vec{y}_0)$$

$$\vec{V}_{C_1 \in 2/0}^{G_2} = V_{z_2} + h \cdot \omega_{x_2} \cdot \vec{z}_0 - h \cdot \omega_{z_2} \cdot \vec{x}_0$$

Le torseur  $\{V_{2/0}^{eq}\}$ , s'écrit donc en  $C_1$  :

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{G_2} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x_2} & -h \cdot \omega_{z_2} \\ \omega_{y_2} & 0 \\ \omega_{z_2} & V_{z_2} + h \cdot \omega_{x_2} \end{matrix} \right\}_{C_1 \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}}$$

On doit avoir

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{e q} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_1} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_2} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_3} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_4} \right\}$$

On déduit alors que

$$\omega_{z_{e q}} = \omega_{z_2} = \omega_{z_1} = \omega_{z_3} = \omega_{z_4} = 0$$

Déplaçons maintenant le torseur en  $G_3$

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{G_3} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x_3} & 0 \\ \omega_{y_3} & 0 \\ \omega_{z_3} = 0 & V_{z_3} \end{matrix} \right\}_{C_3 \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}}$$

On pose  $\vec{C_1 C_3} = -H \cdot \vec{z_0}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{C_1 \in 2/0}^{G_3}} &= \overrightarrow{V_{C_3 \in 2/0}^{G_3}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}^{G_3}} \wedge \overrightarrow{C_1 C_3} \\ \overrightarrow{V_{C_1 \in 2/0}^{G_2}} &= \overrightarrow{V_{z_3}} + (\omega_{x_3} \cdot \vec{x}_0 + \omega_{y_3} \cdot \vec{y}_0) \wedge (-H \cdot \vec{z}_0) \\ \overrightarrow{V_{C_1 \in 2/0}^{G_2}} &= \overrightarrow{V_{z_3}} + H \cdot \omega_{x_3} \cdot \vec{y}_0 - H \cdot \omega_{y_3} \cdot \vec{x}_0 \end{aligned}$$

d'où le torseur

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{G_3} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_{x_3} & -H \cdot \omega_{y_3} \\ \omega_{y_3} & H \cdot \omega_{x_3} \\ 0 & V_{z_3} \end{matrix} \right\}_{C_1 \begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix}}$$

On doit avoir

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{e q} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_1} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_2} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_3} \right\} = \left\{ \gamma_{2/0}^{G_4} \right\}$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega_{x_{e q}} &= \omega_{x_2} = \omega_{x_1} = \omega_{x_3} = \omega_{x_4} = 0 \\ \omega_{y_{e q}} &= \omega_{y_2} = \omega_{y_1} = \omega_{y_3} = \omega_{y_4} = 0 \\ V_{z_{e q}} &= V_{z_2} = V_{z_1} = V_{z_3} = V_{z_4} \end{aligned}$$

Finalement on trouve bien le torseur cinématique d'une liaison glissière :

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{e q} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_z \end{matrix} \right\}_{\begin{matrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{matrix} \begin{matrix} P \\ P \end{matrix}}$$

Q6. Indiquer le nombre d'inconnues cinématiques  $I_c$  du mécanisme.

- 8 liaisons sphère-plan :  $8 \times 5 = 40$
- 4 liaisons pivot :  $4 \times 1 = 4$

$$I_c = 40 + 4 = 44$$

Q7. Déterminer le nombre cyclomatique  $\mu$ .

$$\mu = N_{\text{liaison}} - N_{\text{pièce}} + 1 = 12 - 6 + 1 = 7$$

On peut donc écrire  $E_c = 6 \cdot \mu = 42$  équations de la fermeture cinématique.

L'étude cinématique complète comporte donc un système de 42 équations avec 44 inconnues.

Q8. Déterminer le degré de mobilité cinématique du mécanisme  $m_c$ .

D'après l'étude on a trouvé une mobilité utile, la translation du chariot.

$$m_u = 1$$

Lors du calcul de la liaison équivalente entre le chariot et le bâti pour un galet, on a trouvé :

$$\left\{ \gamma_{2/0}^{G_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x + \omega_{2G_1} & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & V_z + a \cdot \omega_{2G_1} \end{matrix} \right\}_{C_1 \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}}$$

On constate que cette liaison équivalente à une liaison sphère-cylindre comporte 5 inconnues cinématiques alors que 4 suffisent.

La rotation autour de l'axe est la somme de deux rotations élémentaires indépendantes :  $\omega_x + \omega_{2G_1}$ . Il y a donc pour chacune des liaisons entre le chariot et le bâti une mobilité dite « interne ».

$$m_i = 4$$

d'où

$$m_c = m_i + m_u = 5$$

Q9. En déduire le degré d'hyperstatisme  $h$ .

On peut écrire

$$m - h = I_c - E_c$$

d'où

$$\begin{aligned} h &= m - I_c + E_c = 5 - 44 + 42 \\ h &= 3 \end{aligned}$$

Le mécanisme est hyperstatique d'ordre  $h = 3$ .

Q10. Indiquer quels sont les avantages ou inconvénients d'un mécanisme hyperstatique.

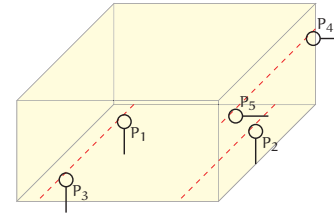
On considère en général qu'un mécanisme hyperstatique est plus rigide (avantage) mais que la contrepartie de cette rigidité est la difficulté à réaliser le mécanisme (inconvénient).

Q11. Quelles sont les conditions associées à cet hyperstatisme ?

Ici, on doit imposer le parallélisme des rails et que la distance suivant  $\vec{y}_0$  entre les galets droits et gauche soit précise.

Q12. Sans introduire de liaisons supplémentaires, est-il possible de supprimer des liaisons sphère-plan pour rendre le système isostatique? Préciser si cette modification permet d'avoir un fonctionnement sans risque pour le guidage en translation.

La liaison globale entre l'ensemble (chariot, 4 galets) et le bâti est réalisée par 8 liaisons sphère-plan, pour réaliser uniquement avec des liaisons sphère-plan une liaison glissière, il en suffit de 5.



Chaque liaison entre le galet et le rail étant équivalente à deux liaisons sphère-plan, on peut commencer par supprimer un galet. Le mécanisme est encore hyperstatique d'ordre  $h = 1$ .

Pour supprimer le dernier degré d'hyperstatisme, on peut par exemple ajouter du jeu dans le mécanisme ou installer un galet réglage suivant  $\vec{y}_0$ .

Cor. 9 : Pompe à boues

Sujet page 45

Q1. La liaison entre le vilebrequin et le carter en  $B_1$  (respectivement  $B_2$ ) est réalisée par un roulement à rotule sur roulements, ce roulement permet d'encaisser les défauts d'alignement. On peut modéliser la liaison réalisée par une liaison sphérique.

La liaison entre le carter et le vilebrequin est modélisée par deux liaisons sphériques.

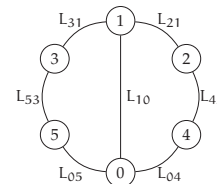


Un calcul rapide montre que cette liaison est hyperstatique  $h = 1$ . La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe  $(O, \vec{B_1 B_2})$ .

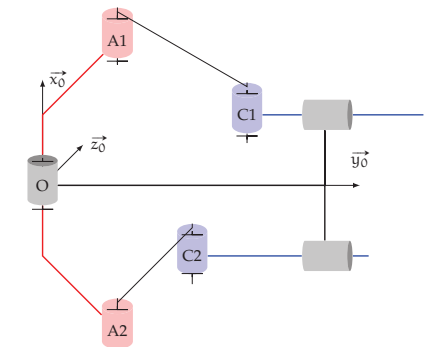
Q2. Identifier les autres liaisons de la pompe à boues.

- $L_{10}$  : Liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$ ,
- $L_{04}$  : Liaison pivot d'axe  $(A_1, \vec{x}_0)$ ,
- $L_{42}$  : Liaison pivot d'axe  $(C_1, \vec{x}_0)$ ,
- $L_{21}$  : Liaison pivot glissant d'axe  $(C_1, \vec{y}_0)$ ,
- $L_{05}$  : Liaison pivot d'axe  $(A_2, \vec{x}_0)$ ,
- $L_{53}$  : Liaison pivot d'axe  $(C_2, \vec{x}_0)$ ,
- $L_{31}$  : Liaison pivot glissant d'axe  $(C_2, \vec{y}_0)$ .

Q3. Tracer le graphe de structure du mécanisme complet.



Q4. Schéma cinématique 3D du mécanisme.



Q5. Le mécanisme est mobile d'ordre  $m = 1$  (la rotation du vilebrequin entraîne le déplacement de deux pistons)

$$m - h = I_c - E_c$$

avec,  $I_c = 9$ ,  $E_c = 2 \cdot 6 = 12$  d'où  $h = 4$ .

Q6. Compte tenu de la symétrie, il faut apporter dans chaque boucle deux mobilités. Par exemple :

- Remplacer les liaisons pivot en  $C_i$  et  $A_i$  par des liaisons sphériques
  - cela rajoute deux mobilités internes, rotation du piston autour de l'axe  $(C, \vec{x}_0)$  et de la bielle (2) autour de l'axe  $(A_i, \vec{A_i C_i})$  pour chaque moitié du mécanisme donc  $m = 5$ ,
  - $I_c = 17$ , d'où,  $h = 5 - 17 + 12 = 0$
  - cette modélisation revient à prendre en compte l'angle de rotulage des roulements.
- Remplacer la liaison pivot en  $C_i$  par une liaison sphère cylindre en  $C_i$ 
  - cette modélisation rajoute une mobilité interne, la rotation du piston autour de son axe donc  $m = 3$  pour le mécanisme complet,
  - $I_c = 15$ ,  $h = 3 - 15 + 12 = 0$
  - cette modélisation revient à prendre le rotulage dans le roulement en  $C_i$  et le jeu axial de cette liaison.
- Une autre possibilité est de modéliser par une sphérique la liaison en  $C_i$  et par une pivot glissant celle en  $A_i$ .