

3 Dynamique du solide

3.1 Principe fondamental de la dynamique

3.1.1 Énoncé

Il existe un repère spatial - temporel (un repère associé à une chronologie) dit repère galiléen \mathcal{R}_g , tel qu'à tout instant, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur le système matériel Σ est égal au torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen.

On note Σ le système matériel isolé et $\bar{\Sigma}$ le reste de l'univers.

Le principe fondamental de la dynamique, P.F.D., est traduit par l'égalité suivante :

$$\{\mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g}\} = \{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{\Sigma/\mathcal{R}_g}} \\ \delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}} \end{array} \right\}_A$$

avec

- résultante des actions mécaniques de $\bar{\Sigma}$ sur Σ : $\overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$;
- moment au point A des actions mécaniques de $\bar{\Sigma}$ sur Σ : $\overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$;
- résultante dynamique de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g : $\overrightarrow{A_{\Sigma/\mathcal{R}_g}}$;
- moment dynamique en A de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g : $\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}$.

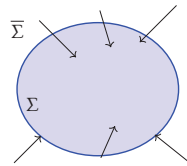


FIGURE 3.1 – Système isolé

3.1.2 Caractère galiléen des repères

Un repère physique est un système d'axes qui permet de décrire la position d'un point, d'un ensemble matériel. Il est bien évident que la position d'un point donné n'est pas décrite de la même manière selon que l'on se place dans un référentiel ou dans un autre.

Le principe fondamental de la dynamique présume l'existence d'un repère dit repère galiléen dans lequel le principe fondamental de la dynamique est valable.

Ce repère de référence dans lequel tous les mouvements pourraient être décrits exactement ne peut être qu'approché. Mais comme c'est toujours le cas dans tous les domaines de la physique, la validité d'une loi dépend du degré de précision souhaité : ainsi un repère usuel de la mécanique peut donc être considéré comme galiléen vis-à-vis de tel problème mécanique, et non galiléen vis-à-vis de tel autre. Les principaux repères approchés sont :

Le référentiel de Copernic est centré au centre d'inertie du système solaire. Les directions de ses axes sont définies à l'extérieur du système solaire par trois galaxies lointaines. Ce référentiel néglige le mouvement du Soleil dans la Voie Lactée et le mouvement de celle-ci dans le reste de l'univers.

Le référentiel de Galilée est centré au centre de la Terre. Ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. On comprend bien que choisir ce repère comme repère galiléen revient à supposer que le mouvement de celui-ci par rapport au repère précédent est négligeable (ou en translation circulaire !). Ce repère est utilisé aussi bien pour décrire le comportement des satellites que pour étudier la pendule de Foucault (mise en évidence de la rotation de la Terre).

Les référentiels liés à la Terre dont le principal est le repère géographique de la sphère terrestre dont le centre est au centre de la Terre et dont les axes sont solidaires de la planète mais aussi tous les repères locaux.

Les référentiels locaux ou du laboratoire dont l'origine est locale au laboratoire et les axes sont orientés selon les propriétés du système étudié. Ce référentiel est le moins galiléen de tous mais il est parfaitement utilisable dans tous les cas classiques. La qualité principale de ce repère est sa facilité d'emploi, mais choisir ce référentiel comme référentiel galiléen revient à négliger la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

Le caractère galiléen peut être toutefois restitué grâce à la loi de composition des accélérations. Dans les repères liés à la Terre, elle conduit à introduire une accélération complémentaire ou accélération de Coriolis dans l'expression générale de l'accélération.

Nous serons donc parfois amené à écrire le P.F.D. dans un repère non galiléen.

3.2 Théorèmes généraux

Le principe fondamental de la dynamique est une égalité entre deux torseurs, pour que ces torseurs soient égaux, il faut que leurs résultantes soient égales et que leurs moments en un point soient égaux. Ces deux équations vectorielles sont les deux théorèmes généraux.

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}} \\ \delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}} \end{array} \right.$$

3.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g , la résultante dynamique est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions extérieures à Σ , $\overrightarrow{A_{\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$, que l'on écrit :

$$m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_{\Sigma},\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$$

3.2.2 Théorème des quantités de mouvement

Nous savons que : $\overrightarrow{\Gamma_{G_{\Sigma},\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G_{\Sigma},\Sigma/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g}$.

Par conservation de la masse dans le système Σ , on peut donc écrire le théorème de la résultante dynamique sous la forme :

$$m_{\Sigma} \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G_{\Sigma},\Sigma/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma}\rightarrow\Sigma}}$$

3.2.3 Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g , le moment dynamique est égal au moment résultant du torseur associé aux actions extérieures à Σ .

$$\vec{\delta}_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A,\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma}$$

3.2.4 Théorème du moment cinétique

Si on écrit le théorème du moment dynamique en G_Σ , centre d'inertie de l'ensemble isolé, on peut donner une autre écriture au théorème du moment dynamique.

Le moment dynamique s'écrit $\vec{\delta}_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g}$, au centre d'inertie G_Σ d'où

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{G_\Sigma,\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma}$$

De même, dans le cas particulier où le point A est fixe dans \mathcal{R}_g , on peut écrire :

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} = \vec{M}_{A,\vec{\Sigma} \rightarrow \Sigma}$$

3.3 Utilisation du P.F.D.

Le principe fondamental de la dynamique se traduit par une égalité de torseur, c'est-à-dire par deux égalités vectorielles (théorèmes généraux) entre les efforts appliqués au système étudié et les quantités d'accélération de ce système par rapport à un repère galiléen.

Un problème de dynamique du solide comporte donc au maximum 6 équations scalaires (2×3) pour chaque solide isolé. Pour pouvoir "tenter" de résoudre ce problème, il ne doit pas comporter plus d'inconnues que d'équations.

On retrouve dans les équations scalaires :

- les paramètres de positions (connus et/ou inconnus),
- les dérivées premières et secondes de ces paramètres,
- les actions mécaniques (connues et/ou inconnues),
- les données du problème.

On distingue trois principaux types de problèmes à résoudre.

- Les actions extérieures sont connues, on cherche à déterminer le mouvement du mécanisme isolé.
- Les actions extérieures sont connues, on cherche à déterminer les actions de liaison entre les différents solides du mécanisme.
- Le mouvement est imposé, on cherche à déterminer les actions extérieures motrices.

Dans le premier cas, il n'est pas forcément nécessaire d'étudier et résoudre tout le système d'équations. On cherche à isoler parmi les équations celles qui permettent d'obtenir l'(les)équation(s) différentielle(s) de mouvement. On appelle équation différentielle du mouvement, une équation différentielle entre les paramètres de mouvement et les actions mécaniques extérieures ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons.

Dans le second cas, il faut en général résoudre la totalité du système.

Le troisième cas est le complémentaire du premier.

3.4 P.F.D dans un repère non galiléen

3.4.1 Composition des accélérations

On se propose de déterminer l'accélération du point P d'un ensemble matériel E (associé à un repère R) en mouvement par rapport à l'ensemble matériel E_1 (repère R_1) lui-même en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g .

Nous savons que :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P,E/\mathcal{R}_g} &= \vec{V}_{P,E/R_1} + \vec{V}_{P,E/\mathcal{R}_g} \\ \vec{V}_{P,E/\mathcal{R}_g} &= \vec{V}_{P,E/R_1} + \vec{V}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P} \end{aligned}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps dans le repère galiléen \mathcal{R}_g :

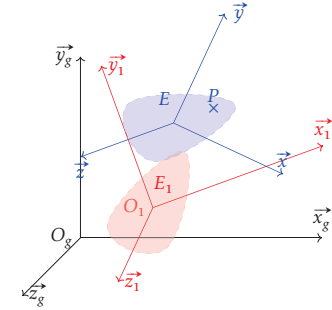


FIGURE 3.2 – Composition des accélérations

$$\left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/R_1} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P} \right]_{\mathcal{R}_g}$$

$$\text{Par définition : } \vec{\Gamma}_{P,E/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} \text{ et } \vec{\Gamma}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g}$$

La relation devient :

$$\vec{\Gamma}_{P,E/\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/R_1} \right]_{\mathcal{R}_g} + \vec{\Gamma}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \left[\frac{d}{dt} \vec{O}_1\vec{P} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P}$$

$$\text{avec } \left[\frac{d}{dt} \vec{O}_1\vec{P} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{O}_1\vec{P} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P} = \vec{V}_{P,E/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P}$$

$$\text{et } \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/R_1} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \vec{V}_{P,E/R_1} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}_{P,E/R_1} = \vec{\Gamma}_{P,E/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}_{P,E/R_1}$$

D'où finalement la relation de composition des accélérations :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{P,E/\mathcal{R}_g} &= \vec{\Gamma}_{P,E/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}_{P,E/R_1} + \vec{\Gamma}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} \\ &\quad + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge (\vec{V}_{P,E/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P}) + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P} \\ \vec{\Gamma}_{P,E/\mathcal{R}_g} &= \vec{\Gamma}_{P,E/R_1} + \vec{\Gamma}_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g} + \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge (\vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P}) \\ &\quad + \left[\frac{d}{dt} \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \vec{O}_1\vec{P} + 2 \cdot \vec{\Omega}_{R_1/\mathcal{R}_g} \wedge \vec{V}_{P,E/R_1} \end{aligned}$$

On note :

- $\vec{\Gamma}_{P,E/\mathcal{R}_g}$: accélération absolue du point P de E par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g ;
- $\vec{\Gamma}_{P,E/R_1}$: accélération relative du point P appartenant à E par rapport au repère R_1 ;

- $\overrightarrow{\Gamma}_{O_1, R_1 / \mathcal{R}_g} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1 P}) + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1 P}$: accélération d'entraînement du point P de R_1 par rapport à \mathcal{R}_g que l'on note $\overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g}$;
- $2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1}$: accélération de Coriolis.

L'accélération absolue d'un point P d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g s'écrit comme la somme de l'accélération relative de P de E par rapport à R_1 , l'accélération d'entraînement du repère R_1 par rapport à \mathcal{R}_g et l'accélération de Coriolis :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma}_{P, E / \mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{\Gamma}_{P, E / R_1} + \overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1} \\ \overrightarrow{\Gamma}_{abs} &= \overrightarrow{\Gamma}_{rel} + \overrightarrow{\Gamma}_{ent} + \overrightarrow{\Gamma}_{cor} \end{aligned}$$

3.4.2 Composition du torseur dynamique

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / \mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A}_{E / \mathcal{R}_g} = \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P / \mathcal{R}_g} \cdot dm \\ \overrightarrow{\delta}_{A, E / \mathcal{R}_g} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P / \mathcal{R}_g} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

Pour le centre d'inertie G la décomposition de l'accélération donne :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{G, E / \mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\Gamma}_{G, E / R_1} + \overrightarrow{\Gamma}_{G, R_1 / \mathcal{R}_g} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{G, E / R_1}$$

Décomposons, le moment dynamique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{A, E / \mathcal{R}_g} &= \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P / R_1} \cdot dm = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Gamma}_{P, E / R_1} + \overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1}) \cdot dm \\ \overrightarrow{\delta}_{A, E / \mathcal{R}_g} &= \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P, E / R_1} \cdot dm + \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g} \cdot dm \\ &\quad + 2 \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1}) \cdot dm \end{aligned}$$

Par analogie, on peut décomposer le moment dynamique absolu comme la somme d'un moment dynamique relatif, d'entraînement et de Coriolis.

$$\overrightarrow{\delta}_{A, E / R} = \overrightarrow{\delta}_{rel} + \overrightarrow{\delta}_{ent} + \overrightarrow{\delta}_{cor}$$

D'où le torseur dynamique que l'on peut décomposer aussi par analogie, sous la forme d'un torseur dynamique relatif, d'entraînement et de Coriolis :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / R} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P / R} dm \\ \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P / R} dm \end{array} \right\}_A$$

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / R} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P, E / R_1} dm \\ \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P, E / R_1} dm \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g} dm \\ \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma}_{P, R_1 / \mathcal{R}_g} dm \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \int_{P \in E} 2 \overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1} dm \\ + 2 \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\Omega}_{R_1 / \mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{V}_{P, E / R_1}) dm \end{array} \right\}_A$$

Par analogie on parle de torseur dynamique d'entraînement, relatif et de Coriolis

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{D}_{E / R} \right\} &= \left\{ \mathcal{D}_{E / R_1} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{E, R_1 / \mathcal{R}_g} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{cor, E / \mathcal{R}_g} \right\} \\ &= \left\{ \mathcal{D}_{rel} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{ent} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{cor} \right\} \end{aligned}$$

3.4.3 Principe fondamental dans un repère non galiléen

Soit E un ensemble matériel, \mathcal{R}_g le repère galiléen et R_1 le repère d'étude. On se propose d'écrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère R_1 , par définition le P.F.D. s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / \mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\overline{E} \rightarrow E} \right\}$$

En décomposant le torseur dynamique sur le repère R_1 :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / R_1} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{E, R_1 / \mathcal{R}_g} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{cor, E / \mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\overline{E} \rightarrow E} \right\}$$

Finalement le P.F.D par rapport au repère non galiléen R_1 devient :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E / R_1} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\overline{E} \rightarrow E} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{E, R_1 / \mathcal{R}_g} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{cor, E / \mathcal{R}_g} \right\}$$

Dans un repère non galiléen, il faut soustraire aux forces extérieures appliquées à l'ensemble matériel E le torseur des forces d'inertie d'entraînement et le torseur des forces d'inertie de Coriolis.

Remarque : Si R_1 est en translation uniforme par rapport au repère galiléen, alors $\left\{ \mathcal{D}_{E, R_1 / \mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ 0 \right\}$ et $\left\{ \mathcal{D}_{cor, E / \mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ 0 \right\}$ donc $\left\{ \mathcal{D}_{E / R_1} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\overline{E} \rightarrow E} \right\}$, R_1 est donc aussi un repère galiléen.

3.5 Application – Équilibrage d'un solide

3.5.1 Problème général de l'équilibrage

Dans le cas d'un mouvement de rotation, les vibrations dues à une mauvaise répartition des masses par rapport à l'axe de la rotation induisent une usure et une détérioration rapide des paliers et créent une gêne pour l'utilisateur (bruits, vibrations).

L'objet de l'équilibrage est de supprimer ces vibrations.

Nous allons évaluer l'influence de la répartition des masses (position du centre d'inertie, symétrie du solide) sur ces vibrations.

a) Données

Soit un solide S_1 de masse M en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au bâti S_0 . Ce solide n'ayant aucune particularité géométrique (ni plan de symétrie, ni axe de révolution), la matrice d'inertie du solide en O est de la forme :

$$\overline{\overline{I}}_O(S_1) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O \begin{matrix} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \\ (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \end{matrix}$$

Le repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au solide en rotation avec $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$, pour $t=0, \theta = 0$.

$$\overrightarrow{OG} = x_g \cdot \vec{x}_1 + z_g \cdot \vec{z}_0$$

R_0 un repère galiléen, \vec{z}_0 est vertical ascendant.

Un couple moteur $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$ permet la rotation.

La liaison pivot est parfaite.

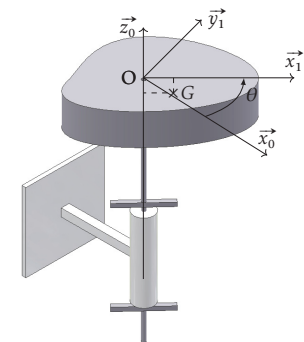


FIGURE 3.3 – Équilibrage

b) Étude dynamique

Inventaire des actions extérieures appliquées au solide en rotation

- Action de la pesanteur sur le solide : $\left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O$
- Couple moteur : $\left\{ \mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{VP}$
- Actions transmissibles par la liaison pivot : $\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{VP \in (O, \vec{z}_0) \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}}$

Détermination du torseur dynamique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .
 Déterminons dans un premier temps le torseur cinétique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 :

- Résultante cinétique : $\overrightarrow{p}_{S_1/R_0} = M \cdot \overrightarrow{V}_{G \in S_1/R_0} = M \cdot x_g \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$
- Moment cinétique, O est un point fixe dans le référentiel, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}_{O, S_1/R_0} &= \overrightarrow{I}_O(S_1) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S_1/R_0} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{O_{S_1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= -E \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= -E \cdot \omega \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \omega \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \omega \cdot \vec{z}_0 \text{ avec } \omega = \dot{\theta} \end{aligned}$$

d'où les composantes du torseur dynamique : $\left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A}_{S_1/R_0} \\ \overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} \end{matrix} \right\}_O$

- $\overrightarrow{A}_{S_1/R_0}$, résultante dynamique, par dérivation de la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{A}_{S_1/R_0} = M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1$$

- $\overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0}$, moment dynamique en O, O est un point fixe dans R_0 donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{O, S_1/R_0} \right]_{R_0} \\ &= -E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 + D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= (D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S_1 .

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{A}_{S_1 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \overrightarrow{A}_{S_1/R_0} \right\}_O &= \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{VP} + \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{VP \in (O, \vec{z}_0) \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)}} \end{aligned}$$

Il est judicieux ici, d'écrire le torseur des efforts transmissibles par la liaison pivot $\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, de déterminer les composantes de la liaison dans cette base puis de revenir dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On obtient donc les deux équations vectorielles suivantes :

- Théorème de la résultante dynamique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}_{S_1/R_0} &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

- Théorème du moment dynamique

$$\overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} = M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 + L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1$$

$$\begin{aligned} (D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 &= M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 \\ &+ L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1 \end{aligned}$$

La projection de ces deux équations donne les 6 équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} = Y_{01} \\ 0 = -M \cdot g + Z_{01} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = L_{01} \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 = M \cdot g + M_{01} \\ C \cdot \ddot{\theta} = C_m \end{cases}$$

Détermination des efforts dans la liaison Pour continuer et simplifier les calculs, nous supposons que le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$, les 6 équations deviennent :

$$\begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ 0 = Y_{01} \\ M \cdot g = +Z_{01} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} D \cdot \dot{\theta}^2 = L_{01} \\ -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g = M_{01} \\ 0 = C_m \end{cases}$$

Le torseur des actions transmissibles dans la liaison pivot s'écrit dans la base liée au solide en rotation $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} = -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 & L_{01} = D \cdot \dot{\theta}^2 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} = -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g \\ Z_{01} = M \cdot g & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \\ O}}$$

On s'aperçoit que les efforts (résultante et moment) dans la liaison pivot sont fonction de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$. En projection dans la base galiléenne, R_0 , on peut mieux évaluer l'influence des paramètres cinétiques sur les efforts dans la liaison.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \cos \theta & L_{01} \cdot \cos \theta - M_{01} \cdot \sin \theta \\ X_{01} \cdot \sin \theta & L_{01} \cdot \sin \theta + M_{01} \cdot \cos \theta \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \\ O}} \text{ avec } \theta = \omega \cdot t \\ \left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} X_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) & L_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) - M_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ X_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) & L_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) + M_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\substack{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \\ O}} \end{aligned}$$

On constate donc que les efforts transmis au bâti par la liaison pivot ne sont pas constants et dépendent du temps. Pour rendre ces efforts indépendants du temps, il faut que :

$$\begin{cases} X_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \text{ c'est-à-dire} \\ M_{01} = 0 \end{cases} \begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \\ D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = 0 \text{ d'où} \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g = 0 \end{cases} \begin{cases} x_g = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Vous pourrez vérifier que ces conditions sont aussi suffisantes si la vitesse n'est pas constante.

3.5.2 Équilibrage

a) Équilibrage statique

On dit qu'un solide en rotation est équilibré statiquement lorsque le centre d'inertie est sur l'axe de rotation (dans l'exemple précédent $x_g = 0$).

b) Équilibrage dynamique

On dit qu'un solide est équilibré dynamiquement, s'il est équilibré statiquement et que les produits d'inertie comportant l'axe de rotation sont nuls (dans l'exemple précédent $D = 0$ et $E = 0$).

c) Principe de l'équilibrage

Équilibrer un solide en rotation revient donc à annuler les différents termes ci-dessus. Deux stratégies sont envisageables :

- ajouter des masses au solide afin de modifier ces caractéristiques cinétiques ;
- usiner le solide (perçage, meulage) afin de modifier la répartition des masses.

La première solution est utilisée pour réaliser l'équilibrage des roues de véhicules. On retrouve plutôt la seconde lors d'équilibrage réalisé sur des pièces massives (volant d'inertie), ces usinages sont alors effectués en usine, lors de la fabrication.

Du point de vue des calculs à réaliser, les deux méthodes sont analogues, la seconde revient à ajouter des masses négatives.

3.5.3 Équilibrage à 2 masses

Soit un solide S_1 , en rotation par rapport au repère galiléen R_0 . On souhaite équilibrer ce solide. Pour cela on rajoute au solide à équilibrer en rotation deux masses ponctuelles M_1 et M_2 (figure et données 3.4). Le nouvel ensemble est donc : $\Sigma = \{S_1, M_1, M_2\}$.

Nous allons rechercher la masse et la position dans le repère lié au solide S_1 de chacune des masses ponctuelles pour que l'ensemble Σ soit équilibré.

a) Détermination des caractéristiques cinétiques de l'ensemble

La masse totale de Σ est $m_\Sigma = m + m_1 + m_2$. La matrice d'inertie de l'ensemble est :

$$\overline{\overline{I_0(\Sigma)}} = \overline{\overline{I_0(S_1)}} + \overline{\overline{I_0(M_1)}} + \overline{\overline{I_0(M_2)}}$$

Remarque : La matrice d'inertie d'une masse ponctuelle en son centre d'inertie est nulle (le volume est nul!) : $\overline{\overline{I_{M_1}(M_1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{M_1}^{M_1}$

En appliquant le théorème de Huygens, on obtient la matrice en O de la masse m_1 :

$$\overline{\overline{I_0(M_1)}} = m_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1^2 + z_1^2 & -x_1 \cdot y_1 & -x_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot y_1 & z_1^2 + x_1^2 & -y_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot z_1 & -y_1 \cdot z_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix}_{(x_1, y_1, z_1)}^O$$

S_1 , le solide à équilibrer de masse M
de matrice d'inertie :

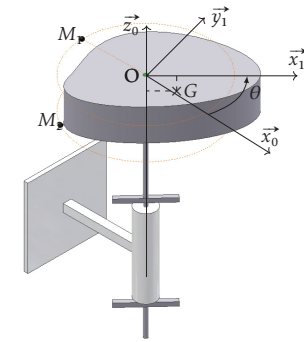
$$\overline{\overline{I_0(S_1)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O^{(x_1, y_1, z_1)}$$

de centre d'inertie :
 $\overline{OG} = x_g \cdot \vec{x}_1 + z_g \cdot \vec{z}_0$;

M_1 la masse ponctuelle de masse m_1 , avec
 $\overline{OM_1} = x_1 \cdot \vec{x}_1 + y_1 \cdot \vec{y}_1 + z_1 \cdot \vec{z}_0$;

M_2 la masse ponctuelle de masse m_2 , avec
 $\overline{OM_2} = x_2 \cdot \vec{x}_1 + y_2 \cdot \vec{y}_1 + z_2 \cdot \vec{z}_0$.

(a) Données



(b) Schéma

FIGURE 3.4 – Équilibrage à deux masses

La matrice d'inertie de l'ensemble matériel Σ s'écrit finalement :

$$\overline{\overline{I_0(\Sigma)}} = \begin{pmatrix} A_\Sigma & -F_\Sigma & -E_\Sigma \\ -F_\Sigma & B_\Sigma & -D_\Sigma \\ -E_\Sigma & -D_\Sigma & C_\Sigma \end{pmatrix}_O^{(x_1, y_1, z_1)}$$

avec

$$\begin{aligned} A_\Sigma &= A + m_1 \cdot (y_1^2 + z_1^2) + m_2 \cdot (y_2^2 + z_2^2) & -D_\Sigma &= -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 \\ B_\Sigma &= B + m_1 \cdot (z_1^2 + x_1^2) + m_2 \cdot (z_2^2 + x_2^2) & -E_\Sigma &= -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 \\ C_\Sigma &= C + m_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2) + m_2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) & -F_\Sigma &= -F - m_1 \cdot x_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

b) Équilibrage statique

L'ensemble est équilibré statiquement si le centre d'inertie de l'ensemble est sur l'axe de rotation.

$$\overline{OG_\Sigma} = \frac{1}{m_\Sigma} (M \cdot \overline{OG} + m_1 \cdot \overline{OM_1} + m_2 \cdot \overline{OM_2})$$

L'équilibre statique est donc réalisé si $\overline{OG_\Sigma} \cdot \vec{x}_1 = 0$ et $\overline{OG_\Sigma} \cdot \vec{y}_1 = 0$.

D'où les deux premières équations à respecter :

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 &= 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 &= 0 \end{aligned}$$

c) Équilibrage dynamique

Les produits d'inertie comportant l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) doivent être nuls (ici D_Σ et E_Σ), d'où les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} -D_\Sigma &= -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0 \\ -E_\Sigma &= -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 \end{aligned}$$

Le système à résoudre est un système de 4 équations et 8 inconnues ($m_1, m_2, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$). Il existe donc a priori une infinité de solutions.

$$\begin{cases} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 = 0 \\ -D_Y = -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0 \\ -E_Y = -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 \end{cases}$$

d) Application : roue

Dans la réalité, des contraintes pratiques de réalisation limitent le nombre de solutions ; ainsi pour une roue (figure 3.5), les masses d'équilibrage ne peuvent être fixées que sur le pourtour de la jante (de rayon R , de largeur L) de chaque côté du pneu.

On a donc :

- $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R$ et $z_1 = 0$ (ou $z_1 = L$) pour la première masse ;
- $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = R$ et $z_2 = L$ (ou $z_2 = 0$) pour la seconde.



FIGURE 3.5 – Roue jante

Reprenons les quatre équations de l'équilibrage.

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 &= 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 &= 0 \\ -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 &= 0 \\ -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 &= 0 \end{aligned}$$

On choisit, un plan pour la première masse ($z_1 = 0$) et le second pour l'autre $z_2 = L$. Il est préférable pour résoudre, d'écrire en polaire les quatre équations, en posant :

$$\begin{cases} x_1 = R \cdot \cos \theta_1 \\ y_1 = R \cdot \sin \theta_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 = R \cdot \cos \theta_2 \\ y_2 = R \cdot \sin \theta_2 \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot R \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \cos \theta_2 &= 0 \\ m_1 \cdot R \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \sin \theta_2 &= 0 \\ -D - m_2 \cdot R \cdot \sin \theta_2 \cdot L &= 0 \\ -E - m_2 \cdot R \cdot \cos \theta_2 \cdot L &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire :

$$\begin{cases} \tan \theta_2 = \frac{D}{E} \\ m_2 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{L \cdot R} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \tan \theta_1 = \frac{D}{E - M \cdot x_g \cdot L} \\ m_1 = \frac{D}{R \cdot L} \cdot \frac{1}{\sin \theta_1} \end{cases}$$

On détermine ainsi la position et la valeur des masses en fonctions des caractéristiques cinétiques de la roue à équilibrer.

Les machines à équilibrer intègrent des capteurs d'efforts qui permettent de mesurer les efforts dans les liaisons. La mesure de ces efforts permet de déduire les caractéristiques cinétiques de la roue par résolution du P.F.D.. Nous avons montré plus haut, à partir de la détermination des actions dans la liaison, que ceux-ci dépendent des caractéristiques de la matrice d'inertie et de l'excentration du centre d'inertie du solide.

$$\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \begin{pmatrix} X_{01} = -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 & L_{01} = D \cdot \dot{\theta}^2 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} = -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g \\ Z_{01} = M \cdot g & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_O}$$

On peut donc, à partir de la mesure des efforts de liaison, déterminer les composantes de la matrice d'inertie du solide à équilibrer puis résoudre complètement le système.

3.6 Feuille de travaux dirigés n°3

Exercice 1 - Détermination expérimentale du moment d'inertie

Corrigé page 25

Mesure d'un moment d'inertie

Il est souvent impossible de déterminer par le calcul le moment d'inertie d'un solide de forme complexe comme la roue dentée de la figure 3.6. Les outils de CAO peuvent faciliter la détermination à condition que le dessin soit réalisé exactement.

La figure suivante représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un engrenage. L'engrenage est fixé de part et d'autre à deux cylindres en acier qui roulent sur les portées cylindriques du bâti 0. En écartant l'engrenage de sa position d'équilibre, on obtient un mouvement oscillatoire. L'objectif du problème est de montrer comment déterminer le moment d'inertie de l'engrenage par rapport à son axe de rotation (C, \vec{y}) , à partir de la mesure de la période d'oscillation.



FIGURE 3.6 – Roue dentée à chevrons

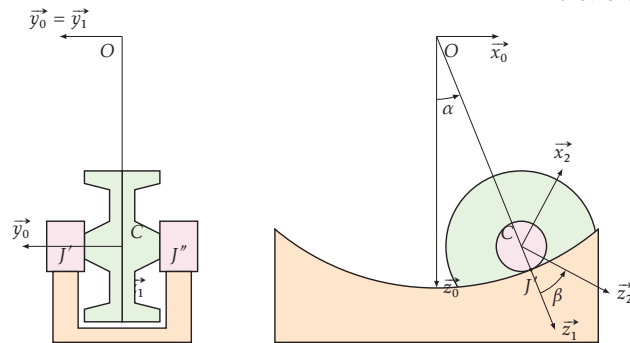


FIGURE 3.7 – Mécanisme d'essai

Données :

- Rayon des portées cylindriques $R = 200$ mm
- Rayon des cylindres $r = 18$ mm
- Épaisseur des cylindres $e = 20$ mm
- Masse de l'engrenage $m = 3617$ g
- Coefficient de frottement en J (respectivement J') $f = 0,15$

Les hypothèses suivantes sont considérées :

- Les cylindres de rayon r sont en acier de masse volumique $\rho = 7800$ kg · m⁻³.
- Il y a roulement sans glissement au point J (respectivement au point J'), le contact est supposé ponctuel.
- La pièce 2 est constituée de l'ensemble : engrenage + 2 cylindres.

- Le point C est le centre de gravité de la pièce 2.
- Le moment d'inertie de la pièce 2 par rapport à son axe de rotation (C, \vec{y}) est noté I_2 . La matrice d'inertie de cette pièce est diagonale.

A. Étude cinématique

Q1. Expliciter les vitesses $\vec{V}_{Ce2/0}$ et $\vec{V}_{Je2/0}$.

Q2. Écrire la relation de roulement sans glissement et déterminer une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

B. Étude dynamique

Q3. Calculer la masse M de la pièce 2.

Q4. Calculer l'accélération du point C.

Q5. Calculer le moment dynamique de la pièce 2 en C.

Q6. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées sur la pièce 2.

Q7. Appliquer le PFD et écrire les équations de la dynamique.

C. Étude du mouvement

Q8. Du système précédent, extraire l'équation différentielle qui décrit le mouvement.

Q9. En supposant que l'angle α reste faible, on peut utiliser la simplification $\sin \alpha = \alpha$. Simplifier et résoudre cette équation du mouvement.

D. Exploitation

À l'aide d'un chronomètre, on mesure une période d'oscillation $\tau = 4,06$ s.

Q10. Calculer la valeur numérique de I_2 .

Q11. En déduire, le moment d'inertie de l'engrenage seul.

À l'instant initial, $t = 0$, la pièce 2 est lâchée à une position $\alpha = \alpha_0$, avec une vitesse nulle.

Q12. Quelle est la valeur maximale α_0 pour qu'il n'y ait pas de glissement en J.

Exercice 2 - Machine à vibrer le béton

D'après Centrale TA95

Corrigé page 26

La figure 3.8 présente schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton et son paramétrage. Un châssis sur roues est solidaire du moule et du stator d'un moteur électrique destiné à générer les vibrations.

A. Données

L'ensemble 1, de masse M_1 , en translation comprend la plate-forme, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Sa position par rapport au repère \mathcal{R}_0 galiléen est définie par $x(t)$. La liaison équivalente par rapport au sol est une glissière de direction \vec{x}_0 .

L'ensemble 2, de masse M_2 , tournant par rapport à 1 autour de l'axe (A, \vec{z}_0) , comporte le rotor du moteur, son arbre et deux disques excentrés. On note :

- $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ la vitesse de rotation constante de l'ensemble 2 ;
- G_2 le centre d'inertie du solide 2 avec $\vec{AG}_2 = c \cdot \vec{x}_2$;
- la matrice d'inertie de l'ensemble 2 s'écrit en A dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

$$\overline{\overline{I_A(2)}} = \begin{pmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2}$$

Les roues sont en liaison pivot, sans frottement, par rapport à 1. La masse et l'inertie des roues sont négligeables.

Le moteur applique sur le rotor un couple noté $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$.

Le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est plan de symétrie du système.

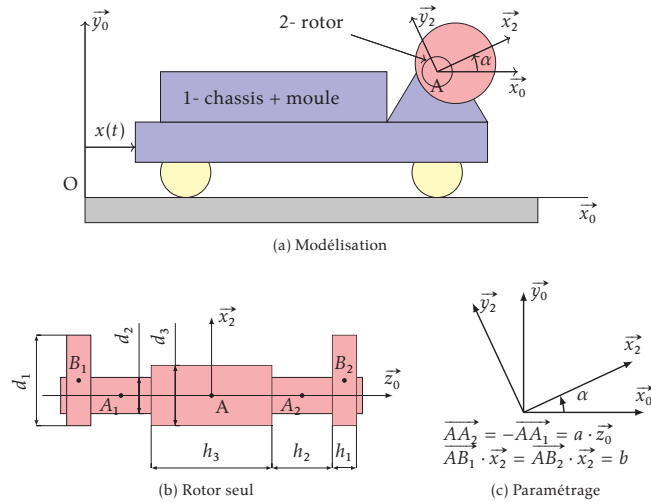


FIGURE 3.8 – Machine à vibrer le béton

B. Questions

Q1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_2 , centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

Q2. On modélise l'ensemble 2 par :

- un cylindre de diamètre d_3 , de hauteur h_3 et de masse volumique ρ_3 pour le rotor du moteur ;
- deux disques centrés respectivement en B_1 et B_2 de diamètre d_1 , de hauteur h_1 de masse volumique ρ_1 ;
- deux arbres cylindriques centrés respectivement en A_1 et A_2 de diamètre d_2 , de hauteur h_2 et de masse volumique ρ_1 reliant le rotor aux disques ;
- les trois cylindres sont d'axe \vec{z}_0 .

Q2a. Justifiez la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

Q2b. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble 2 par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) , en fonction des h_i, d_i et ρ_i .

Q3. Déterminer $x(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, t)$, l'équation du mouvement de l'ensemble 1, par rapport au repère \mathcal{R}_0 . On considérera que le moteur tourne à vitesse constante et qu'à l'instant $t = 0, x(0) = 0$. Pour cela :

Q3a. Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur 1 et 2.

Q3b. Appliquer le PFD sur l'ensemble $\{1+2\}$.

Q3c. En déduire l'équation de mouvement. Limiter l'étude aux équations nécessaires pour résoudre le problème posé.

Q4. Déterminer l'expression du moment du couple moteur C_m du stator sur le rotor, en fonction de M_1, M_2, g, ω, c et t .

On modélise la liaison en A_1 entre le rotor et le châssis par une liaison sphérique et celle en A_2 par une liaison sphère-cylindre.

Q5. Déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles pour les deux liaisons entre l'ensemble 1 et l'ensemble 2 en A_1 et A_2 .

Exercice 3 - Retourneur - etude dynamique
adapté E3A

Corrigé page 28

Un mécanisme de transport de papier utilise pour un transfert entre deux postes de travail, un retourneur. Une bobine de papier est placée sur le retourneur puis celui-ci effectue une rotation d'axe (O, \vec{x}_0) . Le retourneur est en liaison pivot parfaite avec le bâti. Un couple moteur de module C_m est appliqué sur le retourneur.

La bobine (B) est un cylindre creux de diamètre extérieur $D_e = 330$ mm, de diamètre intérieur $D_i = 120$ mm, de hauteur $h = 98$ mm, homogène de masse $M_B = 6,5$ kg et de centre de gravité G_B ($\vec{OG}_B \cdot \vec{y}_1 = y_B, y_B = 350$ mm).

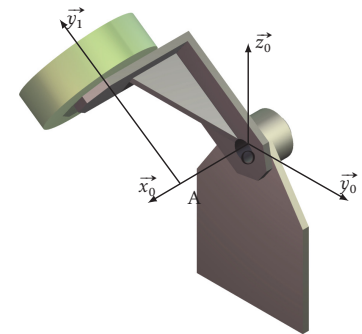


FIGURE 3.9 – Retourneur

Le retourneur (R) est de masse M_R ($M_R = 22$ kg), de centre de gravité G_R ($\vec{OG}_R \cdot \vec{y}_1 = y_R, y_R = 200$ mm), la matrice d'inertie du retourneur en O dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ s'écrit :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(R)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{O, (\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

avec $A = 0,35 \text{ kgm}^2, B = 0,28 \text{ kgm}^2, C = 0,57 \text{ kgm}^2, D = 0 \text{ kgm}^2, E = 0 \text{ kgm}^2$ et $F = 0,2 \text{ kgm}^2$.

Q1. Déterminez la matrice d'inertie en G_B de la bobine dans base $(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. En déduire le moment d'inertie par rapport à (O, \vec{x}_0) de la bobine.

Q2. Déterminez le moment d'inertie de l'ensemble $\Sigma = \{\text{retourneur, bobine}\}$ par rapport à (O, \vec{x}_0) .

Q3. Faire l'inventaire des actions appliquées sur l'ensemble Σ .

Q4. Déterminer, à partir de l'équation différentielle du mouvement le couple moteur C_m .

Exercice 4 - Équilibrage d'un arbre d'impression

Corrigé page 29

A. Présentation

L'objectif de cette étude est de vérifier et éventuellement de corriger l'équilibrage de l'arbre d'impression. Celui-ci est en liaison pivot supposée parfaite avec le bâti de la machine grâce à deux paliers (P1) et (P2). Il est important que l'équilibrage dynamique de cet arbre soit correctement réalisé afin d'éviter les phénomènes vibratoires qui pourraient, à terme, entraîner une détérioration des paliers.

Le but de l'équilibrage dynamique est de rendre l'action mécanique exercée par le bâti de la machine sur l'arbre d'impression au niveau des paliers aussi constante que possible. En particulier, il est souhaitable de rendre cette action mécanique indépendante du mouvement de l'arbre d'impression par rapport au bâti.

On se propose dans cette étude de montrer, dans un premier temps, que l'équilibrage dynamique est effectif si :

- le centre d'inertie de l'arbre d'impression est situé sur l'axe de rotation,
- l'axe de rotation est principal d'inertie pour l'arbre d'impression.

de constater que ces conditions ne sont pas remplies dans le cas de l'arbre décrit ci-dessous, et enfin d'apporter une solution permettant d'équilibrer dynamiquement cet arbre.

A.1. Description et modélisation de l'arbre d'impression

L'arbre d'impression est constitué d'un ensemble d'éléments qui peut être divisé en deux sous-ensembles :

- L'arbre proprement dit comportant les éléments nécessaires à sa liaison avec le bâti et les éléments nécessaires à son entraînement en rotation. Cette partie peut être considérée comme symétrique par rapport à l'axe de rotation.
- La tête d'impression représentée et décrite en haut de la page 3 de la chemise contenant le sujet. La complexité de cette tête peut nous laisser supposer qu'aucune symétrie n'est respectée.

On désigne par :

- (S), le bâti de la machine.
- (Σ), l'ensemble d'éléments constituant l'arbre d'impression.
- G, le centre d'inertie de (Σ).
- m, la masse de (Σ).
- O, le centre de la liaison pivot d'axe (O, z₀) de l'arbre d'impression (Σ) avec le bâti (S) de la machine.

Soit R₀(0, x₀, y₀, z₀) un repère considéré comme galiléen lié au bâti (S) de la machine. Soit R₁(0, x₁, y₁, z₁) avec z₁ = z₀ un repère lié à l'arbre d'impression (Σ).

On pose (x₀, x₁) = (y₀, y₁) = θ et OG = a · x₁ + b · y₁ + c · z₀.

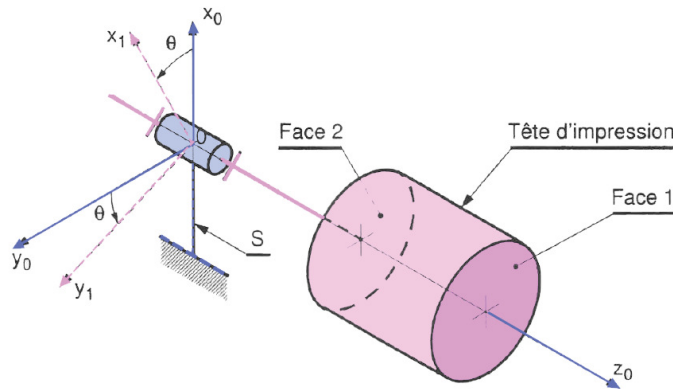


FIGURE 3.10 – Modélisation de l'arbre d'impression

La matrice associée à l'opérateur d'inertie de l'arbre d'impression (L) au point O, dans la base du repère R₁ est de la forme :

$$\overline{\overline{I}}_O(\Sigma) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

L'action mécanique exercée par le bâti (S) de la machine sur l'arbre d'impression Σ est représentée, au point O, par le torseur :

$$\{T_{S \rightarrow \Sigma}\} : \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{S \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{O, S \rightarrow \Sigma}} \end{Bmatrix}_O : \begin{Bmatrix} X_O \cdot \vec{x}_1 + Y_O \cdot \vec{y}_1 + Z_O \cdot \vec{z}_0 \\ L_O \cdot \vec{x}_1 + M_O \cdot \vec{y}_1 \end{Bmatrix}_O$$

L'ensemble [E] des autres actions mécaniques "extérieures" (pesanteur, transmission) exercées sur l'arbre d'impression Σ est représentée, au point O, par le torseur :

$$\{T_{E \rightarrow \Sigma}\} : \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{E \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{O, E \rightarrow \Sigma}} \end{Bmatrix}_O : \begin{Bmatrix} X_E \cdot \vec{x}_1 + Y_E \cdot \vec{y}_1 + Z_E \cdot \vec{z}_0 \\ L_E \cdot \vec{x}_1 + M_E \cdot \vec{y}_1 + N_E \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O$$

- Q1.** Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point G dans son mouvement par rapport au repère R₀. Exprimer les résultats dans le repère R₁ en fonction des coordonnées du point G et des dérivées temporelles de θ.
- Q2.** Déterminer au point O le torseur dynamique de l'arbre d'impression (Σ) dans son mouvement par rapport au repère R₀. Exprimer les éléments de réduction de ce torseur dans le repère R₁, en fonction de m, des coordonnées du point G, des dérivées temporelles de θ et des termes de la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}_O(\Sigma)$.
- Q3.** Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système matériel Σ. En déduire les six équations scalaires correspondantes.
- Q4.** Déterminer la résultante de l'action de liaison $\overrightarrow{R_{E \rightarrow \Sigma}}$ dans la base (x₀, y₀, z₀) dans le cas particulier où la vitesse de rotation est constante (θ̇ = ω₀). Que peut-on dire de cette action ? À quelles conditions cette action est nulle ou constante ?
- Q5.** Rappeler à quelles conditions le moment de l'action mécanique de liaison est constant ou nul.

A.2. Équilibrage de l'arbre d'impression

Les propriétés dynamiques de l'arbre d'impression (Σ) ont été déterminées à l'aide d'un logiciel de type modeler volumique. Les résultats sont les suivants :

- Masse de l'arbre d'impression (Σ) : m = 1,95 kg.
- Coordonnées dans le repère R₁ du centre d'inertie G de (Σ) a = 0,15 mm; b = 0,07 mm; c = 34,6 mm.
- Matrice associée à l'opérateur d'inertie de l'arbre d'impression (Σ) au point G, dans la base du repère R₁ (valeurs exprimées en kg mm²)

$$\overline{\overline{I}}_G(\Sigma) = \begin{pmatrix} 2,27 \times 10^4 & -3,9 & -47,05 \\ -3,9 & 2,27 \times 10^4 & -26,25 \\ -47,05 & -26,25 & 980 \end{pmatrix}_G \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

Q6. Calculer ou mettre en évidence les valeurs des termes qui permettent de constater que l'arbre d'impression (Σ) n'est pas équilibré dynamiquement.

On propose de réaliser l'équilibrage de l'arbre d'impression (Σ) en plaçant des masselottes de masse m₁, et m₂ respectivement aux points H₁ et H₂ définis ainsi :

- Point H₁ situé sur la face 1 de la tête d'impression, tel que $\overrightarrow{OH}_1 = h_1 \cdot \vec{z}_0 + r \cdot \vec{u}_1$ avec (x₁, u₁) = α₁.
- Point H₂ situé sur la face 2 de la tête d'impression, tel que $\overrightarrow{OH}_2 = h_2 \cdot \vec{z}_0 + r \cdot \vec{u}_1$ avec (x₁, u₂) = α₂.

Les formes et les dimensions de la tête d'impression imposent les valeurs de h₁, h₂ et r. On désigne par :

- (Σ'), l'ensemble d'éléments constituant le nouvel arbre d'impression.
- G', le centre d'inertie de (Σ') tel que $\overrightarrow{OG'} = a' \cdot \vec{x}_1 + b' \cdot \vec{y}_1 + c' \cdot \vec{z}_0$

La matrice associée à l'opérateur d'inertie de l'arbre d'impression (Σ') au point O, dans la base du repère R₁ est de la forme :

$$\overline{\overline{I}}_O(\Sigma') = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix}_O \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{matrix}$$

- Q7. Établir les relations littérales liant m_1 , m_2 , α_1 et α_2 afin que l'équilibrage soit réalisé.
On donne $h_1 = 150 \text{ mm}$; $h_2 = 210 \text{ mm}$; $r = 35 \text{ mm}$.
- Q8. Calculer les valeurs de m_1 , m_2 , α_1 et α_2 .

Exercice 5 - Étude d'un drone Quadrirotor

Adapté du concours ICNA 2011

Corrigé page 32

Description du drone

Le mini-drone, développé au sein de l'unité de recherche et d'innovation sur les drones à l'ENAC a été un des lauréats en mai 2009 du challenge mini-drone lancé par le ministère de la Défense afin de simuler une mission opérationnelle de renseignement en zone urbaine, sa charge utile embarquée est constituée d'un appareil photo.

Cet hélicoptère quadri-rotor (figure 3.11) à pas fixe est une configuration très répandue dans le monde des micro-drones. Alors que les hélicoptères classiques utilisent un système mécanique complexe de pas cyclique et collectif, le quadri-rotor ne dispose d'aucun organe mécanique spécifique et assure son contrôle en agissant uniquement sur la vitesse de rotation de ses rotors. Cette simplicité permet de disposer d'un véhicule de faible coût, robuste et facile à miniaturiser.

Le contrôle vertical de l'appareil (translation suivant l'axe Z) est obtenu en faisant varier simultanément la vitesse de rotation des quatre moteurs. Le contrôle en roulis (rotation autour de X) et en tangage (rotation autour de Y) est obtenu en faisant varier de manière différentielle les vitesses de rotation des moteurs d'un même axe (ω_2/ω_4 pour le roulis et ω_1/ω_3 pour le tangage).

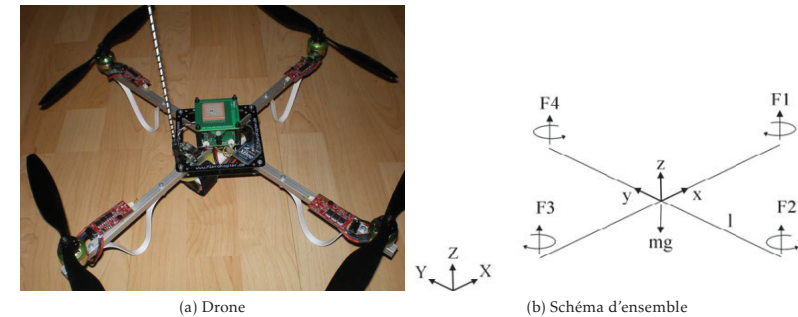


FIGURE 3.11 – Drone quadrirotor

Déroulement de l'étude

Le sujet propose dans la partie A une étude de différentes solutions de motorisation.

Puis il traite successivement des phases élémentaires d'une mission de l'appareil :

- Partie A : décollage (mouvement de translation vertical suivant l'axe Z).
- Partie B : basculement autour de l'axe de roulis (mouvement de rotation autour de l'axe X).

Ce sujet ne traite que des parties dynamiques et le traitement de l'image codée. Toutes les parties relatives à l'asservissement du drone ne sont pas incluses.

A. Étude du décollage

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement du quadrirotor lors du décollage, mouvement de translation vertical selon l'axe Z (moteurs F1, F2, F3 et F4 actifs sur la figure page 20).

Après réglage des différents paramètres de la boucle d'asservissement, certains critères extraits du cahier des charges fonctionnel (CDCF) seront vérifiés.

Extrait du CDCF en phase Décollage :

Accélération verticale	— vers le haut 3 g — vers le bas 0,5 g avec g l'accélération de pesanteur.
Précision	Pas d'écart statique
Stabilité	— marge de phase minimale : 35° — dépassement maximal inférieur à 5%
Rapidité	Temps de réponse à 5% inférieur à 0,6 s.

A.1. Recherche du point de fonctionnement ω_0

Dans le mouvement de déplacement vertical d'axe Z de l'appareil, les quatre moteurs tournent à la même vitesse et fournissent la même poussée F ($F = F_1 = F_2 = F_3 = F_4$).

La masse totale du mini-drone (moteurs inclus) est $m = 240$ g. On prendra $g = 10$ m · s⁻².

Q1. Écrire l'équation du mouvement sur l'axe vertical et calculer numériquement la poussée F_0 que doit exercer un seul moteur pour maintenir l'appareil en vol stationnaire.

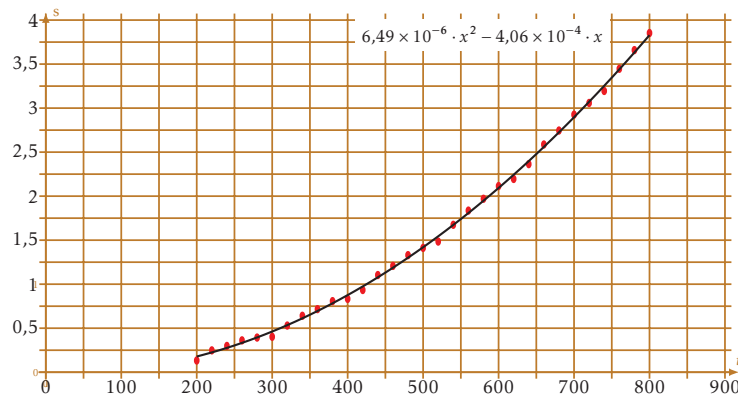


FIGURE 3.12 – Poussée = $f(\omega)$ en N

La poussée F (portance aérodynamique) varie avec ω^2 . Des mesures réalisées sur un seul groupe moto-propulseur ont permis de tracer la courbe (figure 3.12) liant F à la vitesse de rotation ω en radian/s.

Q2.

Q2a. Déterminer la vitesse de rotation ω_0 des moteurs en vol stationnaire.

Q2b. Vérifier si le critère du cahier des charges sur l'accélération verticale vers le haut et vers le bas est respecté et indiquer pour quelle vitesse moteur ces accélérations maximales sont atteintes.

B. Basculement selon l'axe de roulis

L'objectif de cette partie est d'étudier le comportement du quadricoptère lors du basculement autour de l'axe \vec{x} de roulis (moteurs F2 et F4 actifs sur la figure 3.11).

Le réglage des différents constituants de la boucle d'asservissement nécessite de tester les solutions sur un support fixe; pour cela il a été construit un support appelé « balançaïre » (photo figure 3.13a). C'est sur cette balançaïre que seront réalisées les expérimentations dont les résultats seront analysés.



(a) Drone sur la « balançaïre »

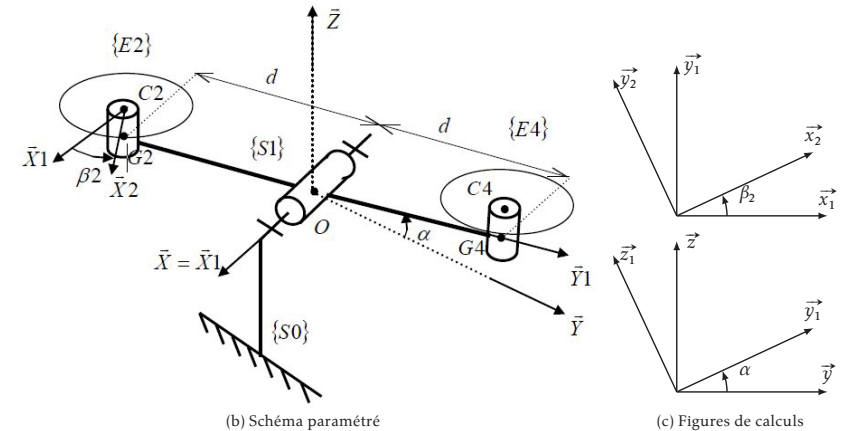


FIGURE 3.13 – Mécanisme d'étude du drone

B.1. Étude dynamique du basculement

L'objectif de l'étude est de quantifier l'importance des effets dynamiques lors des changements d'inclinaison selon l'axe \vec{x} de roulis, et en particulier d'analyser le phénomène de couple gyroscopique. Le schéma paramétré du dispositif est fourni figure 3.13b.

On travaillera :

- dans un premier temps sur l'ensemble $\{E2\} = \{\text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2}\}$,
- puis sur l'ensemble $\{E4\} = \{\text{hélice 4} + \text{rotor moteur 4}\}$ dont les caractéristiques inertielles sont identiques à celles de $\{E2\}$,
- et enfin on y adjoindra la structure $\{S1\} = \{\text{bras} + \text{stator moteur 2} + \text{stator moteur 4}\}$ qui comprend le bras reliant les deux moteurs et les stators de chaque moteur; $\{S1\}$ est en liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) par rapport au support fixe $\{S0\}$; les frottements de cette liaison sont négligeables; O est le centre de gravité de $\{S1\}$.

On appelle « balançaïre » l'ensemble $\{B\} = \{E2\} + \{E4\} + \{S1\}$; son centre de gravité est O .

On note : $R_0 = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère fixe galiléen de référence, lié au support fixe $\{S0\}$.

Les différentes bases et les paramètres angulaires sont récapitulés figure 3.13c.

Pour $\{E2\}$, l'hélice (figure 3.14a) est un modèle tripale (figure 3.14b) de centre $C2$ et dont les pales sont orientées à 120° les unes des autres.

Le rotor moteur sur lequel l'hélice est fixée est considéré comme un cylindre homogène; la masse de l'ensemble $\{E2\} = \{\text{hélice 2} + \text{rotor moteur 2}\}$ est noté : m ; le centre de masse de l'ensemble est G_2 situé sur l'axe (C_2, \vec{z}_1) ; la masse de l'hélice seule est notée m_h .

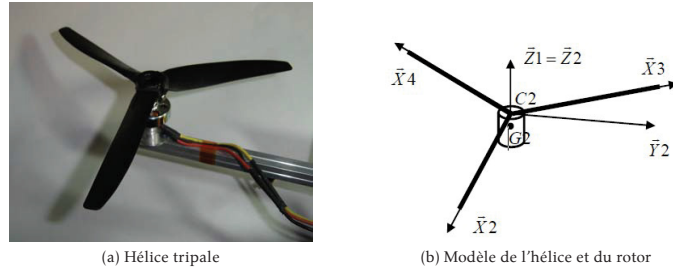


FIGURE 3.14 – Hélice tripale

On donne la matrice d'inertie de cet ensemble {E2} :

$$\overline{\overline{I_{G_2}(E2)}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{G_2}^{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}$$

Q3. Indiquer quelle est la particularité géométrique qui permet de dire que $P_{xy} = 0$ et $P_{yz} = 0$.

Q4. Démontrer que $P_{xz} = 0$ et que $I_{xx} = I_{yy}$ (on pourra considérer les pales comme des tiges rectilignes de directions respectives : (C_2, \vec{x}_2) , (C_2, \vec{x}_3) , (C_2, \vec{x}_4) , (figure 3.14b) et raisonner séparément sur le rotor cylindrique et l'hélice).

On admettra sans démonstration que la matrice $\overline{\overline{I_{G_2}(E2)}}$ de {E2} est identique dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On utilisera pour la suite la matrice d'inertie de l'ensemble {E2} suivante :

$$\overline{\overline{I_{G_2}(E2)}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{G_2}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

au point G_2 , exprimée dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

On donne : $\overline{OG_2} = -d \cdot \vec{y}_1$ avec $d = 0,2$ m.

Q5. Donner l'expression analytique au point O, du moment cinétique $\overline{\overline{\sigma_{O,E2/R_0}}}$ de {E2} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Q6. Donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\overline{\overline{\delta_{O,E2/R_0}}}$ de {E2} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Q7. Identifier dans l'expression du moment dynamique, chacun des termes associés aux dénominations suivantes :

R = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Roulis » ;

L = « moment des effets dynamiques selon l'axe de Lacet » ;

C = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique ».

On donne le moment d'inertie I_{S1} de la structure {S1} par rapport à l'axe (O, \vec{x}) .

Q8. Donner l'expression analytique du moment dynamique $\overline{\overline{\delta_{O,S1/R_0}}}$.

On utilise l'angle β_4 pour paramétrer la position angulaire de {E4} par rapport à {S1}.

On étudie l'ensemble {E4} = {hélice 4 + rotor moteur 4}.

La matrice d'inertie de {E4} exprimée en G_4 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est identique à la matrice de

{E2} exprimée en G_2 et $\overline{OG_4} = +d \cdot \vec{y}_1$:

$$\overline{\overline{I_{G_4}(E4)}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}_{G_4}^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

Q9.

Q9a. À partir des résultats obtenus à la question 6, donner l'expression analytique au point O, du moment dynamique $\overline{\overline{\delta_{O,E4/R_0}}}$ de {E4} dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en fonction (entre autre) de l'angle β_4 et de ses dérivées.

Q9b. En déduire l'expression analytique $\overline{\overline{\delta_{O,B/R_0}}}$ du moment dynamique de l'ensemble balançoire : {B}={E2}+{E4}+{S1} dans son mouvement par rapport à {S0}.

Q9c. C7 Exprimer le terme **CB** = « moment des effets dynamiques de Coriolis » ou « couple gyroscopique » qui s'exerce sur l'ensemble {B}.

On donne les résultantes des actions exercées par l'air sur les hélices H2 et H4, du fait de leur rotation : $\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{z}_1$ et $\vec{F}_4 = F_4 \cdot \vec{z}_1$.

Q10. Déterminer l'expression analytique de l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$ en fonction de F_2 , F_4 , des éléments inertiels et des distances.

Q11.

Q11a. Quel type de mouvement obtient-on pour {S1}, si F_2 , F_4 , prennent des valeurs constantes différentes l'une de l'autre ?

Q11b. En déduire l'expression (en fonction de $\ddot{\alpha}$ et du temps t) de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ et de la position α , si l'on considère les conditions initiales $\dot{\alpha} = 0$ rad · s⁻¹ et $\alpha = 0$ rad.

Pour la suite, dans l'objectif de déterminer la valeur numérique du « couple gyroscopique » CB obtenu question 9 et pour la configuration de mouvement obtenue question 11, on utilise les données numériques suivantes :

$$d = 0,2 \text{ m}; \quad m = 0,04 \text{ kg}; \quad I_{S1} = 64 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad I_{xx} = 18 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2; \quad I_{zz} = 10 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

On se place dans la configuration idéale pour laquelle les moteurs passent instantanément de la vitesse $\dot{\beta}_2 = \dot{\beta}_4 = 500$ rad · s⁻¹ aux vitesses $\dot{\beta}_2 = 400$ rad · s⁻¹ et $\dot{\beta}_4 = 600$ rad · s⁻¹.

Dans ce cas les efforts F_2 et F_4 prennent les valeurs $F_2 = 0,9$ N et $F_4 = 2,1$ N.

Q12.

Q12a. Calculer la valeur numérique de l'accélération angulaire $\ddot{\alpha}$; en déduire la valeur du couple gyroscopique CB pour la position $\alpha = 0,5$ rad = 28,6°.

Q12b. Comparer le résultat obtenu avec la valeur du moment M_h généré autour de l'axe \vec{x} de roulis par les actions \vec{F}_2 et \vec{F}_4 des hélices pendant le mouvement de basculement.

Q12c. Conclure sur l'importance relative du couple gyroscopique lors de l'utilisation du drone et à son influence éventuelle lors des manœuvres.