

# DS - dynamique du solide

Exercice 1 - Étude dynamique d'un rugosimètre  
adapté à partir de Mines-Ponts

Corrigé page 9

## RUGOSIMÈTRE TRIDIMENSIONNEL à GRANDE VITESSE Système développé par le laboratoire SATIE, à l'École Normale Supérieure de Cachan

### A. Présentation générale du rugosimètre à grande vitesse

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques (longueur, orientation, perpendicularité...). La figure 1 représente un relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une partie d'une aube de turbine de haute précision (à droite en fausses couleurs).

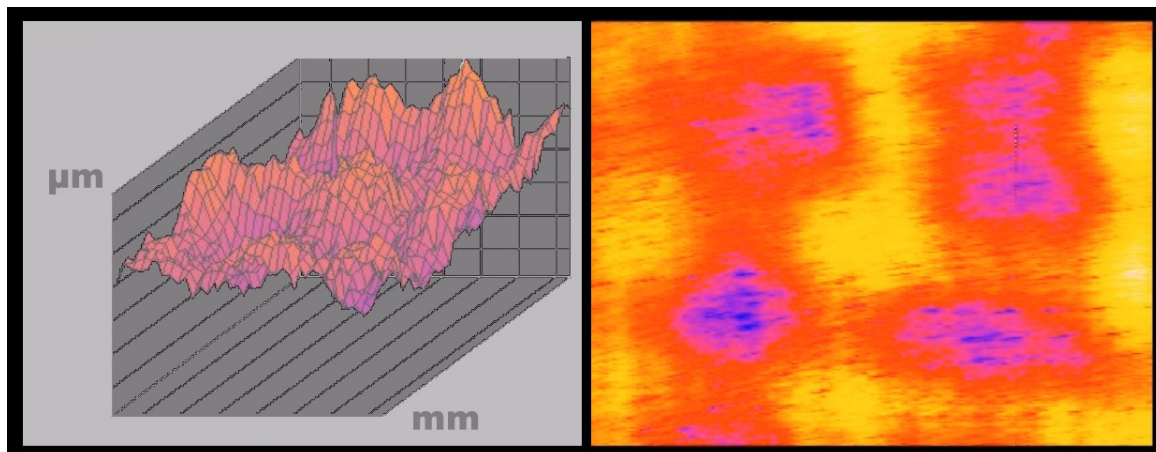


FIGURE 1 – Relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une aube

La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal et des données (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

De la conjonction des caractéristiques techniques du capteur et du traitement numérique vont découler les qualités essentielles du rugosimètre : sa rapidité ; sa résolution ; sa précision ; son amplitude de mesure.

Lorsque l'ensemble est suffisamment rapide, il peut être utilisé pour réaliser des relevés de surface ( $z$  fonction de  $(x, y)$ , ou « mesure 3D ») et non plus simplement des profils linéaires ( $z$  fonction de  $x$ , ou « mesure 2D »). Si, à cette exigence de rapidité, on ajoute celle de précision ainsi que celle de grande amplitude de mesure, on arrive, avec les technologies actuellement disponibles, à des capteurs très chers (de l'ordre de 50 000 euros).

Cela fait que le développement de la rugosimétrie 3D de précision a été, jusqu'à présent, assez lent. Le projet, dont est tiré le sujet, a pour ambition de développer et de mettre sur le marché un rugosimètre 3D de précision à faible coût.

L'objet de cette étude est de valider / critiquer / améliorer certaines techniques et technologies retenues pour le prototype du rugosimètre 2D. Ce prototype a été conçu par le laboratoire SATIE de l'École Normale Supérieure de Cachan. Ce projet est le fruit d'un travail pluridisciplinaire qui a impliqué des commerciaux, des scientifiques et des techniciens, et a été financé par l'Agence pour la Valorisation de la Recherche d'Ile-de-France.

### A.1. Structure générale d'un rugosimètre à grande vitesse

Le principe d'un capteur opto-mécanique (association d'un capteur optique et d'un capteur mécanique) a été retenu, pour ce prototype. Il est décrit succinctement ci-après (figure 2) :

- un capteur optique assure une résolution verticale comparable à celle des meilleurs capteurs mécaniques actuels ( $< 10 \text{ nm}$ ). Ce capteur, de faible amplitude de lecture ( $20 \mu\text{m}$ ), permet une mesure rapide des hautes fréquences spatiales (variations rapides) des profils rugosimétriques mesurés;
- un asservissement mécanique vertical à grande amplitude (environ  $10 \text{ mm}$ ) permet à la tête optique de suivre les moyennes et basses fréquences spatiales (variations plus lentes) des profils. Un second capteur

donne la position verticale de la tête optique.

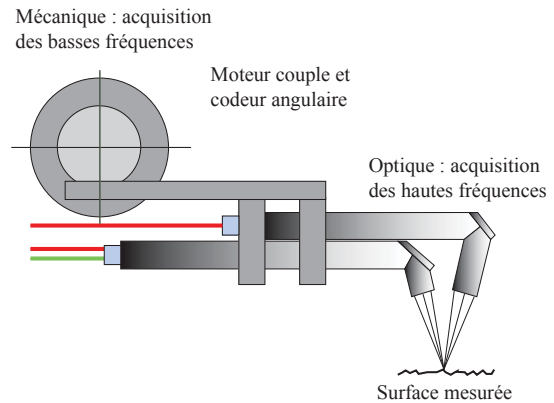


FIGURE 2 – Principe du système opto-mécanique

Le profil complet sera obtenu par la somme des signaux fournis par les deux capteurs. Le déplacement vertical du capteur optique est assuré par une Unité de Rotation (U.R.) portée par le coulisseau (2) (figure 3) ;

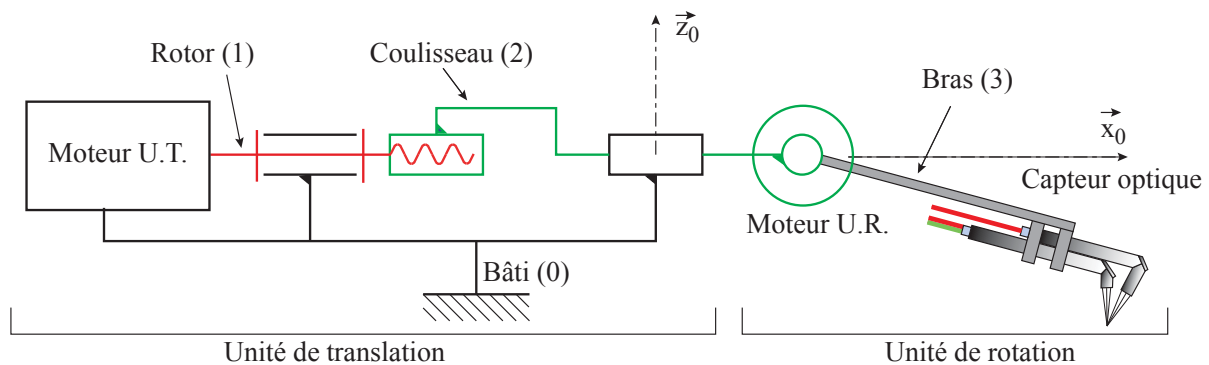


FIGURE 3 – Schéma du prototype de rugosimètre 2D

Ce capteur opto-mécanique est lui-même déplacé au-dessus de la surface à mesurer par une Unité de Translation (U.T.) à vitesse régulée (figure 3), ce qui permet d'obtenir un « profil 2D »,  $z$  fonction de  $x$ . La vitesse de déplacement visée par ce prototype est de  $20 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Dans sa future version 3D, une seconde U.T. de direction ( $\vec{y}$ ) permettra de donner une image de la surface par une juxtaposition de profils 2D : on « scanner » la surface.

Le coût estimé de ce rugosimètre est de 10 000 euros.

### A.2. Principe de mesure du capteur optique

Le principe de mesure du capteur optique est l'écartométrie. Ce procédé, déjà utilisé en robotique, n'a encore jamais servi en rugosimétrie industrielle. Un faisceau laser (« émission ») est focalisé sur la surface à mesurer.

La tache focale se déplace devant les images de deux demi-disques de réception. L'intensité lumineuse d'émission se partage ainsi entre deux photorécepteurs. Cette différence d'intensité permet de calculer la position horizontale de la tache focale d'émission. Cette position horizontale de la tache focale est ensuite convertie en position verticale de la surface par rapport au point focal (qui sera noté par la suite (P)) (figure 4).

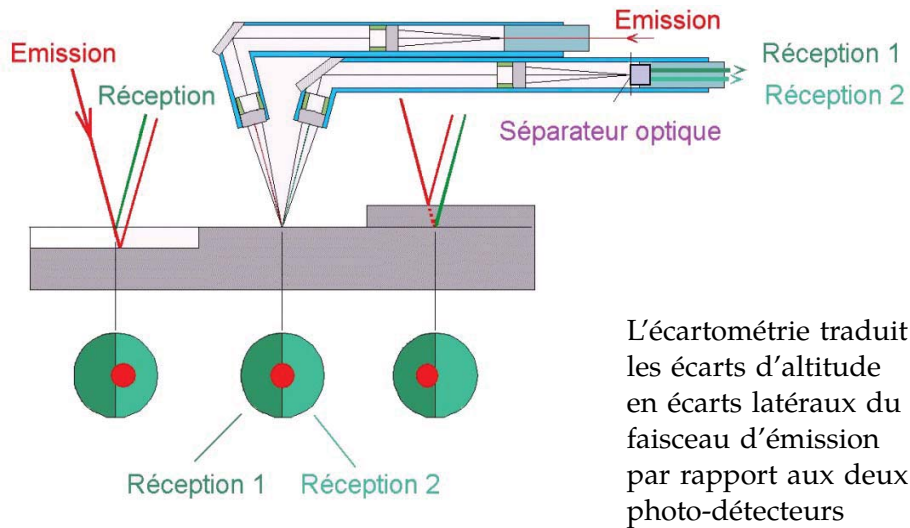


FIGURE 4 – Principe du capteur optique : l'écartométrie

### B. Caractérisation globale du rugosimètre

Dans cette partie, nous vous demandons de caractériser de façon globale le système étudié puis de déterminer les liens existant entre les différents éléments de ce système. Ceci permettra d'étudier ultérieurement les caractéristiques de certains constituants, puis de les modifier si leur comportement ne donne pas satisfaction en ayant en permanence à l'esprit les contraintes qui lient ces éléments spécifiques aux autres éléments du système global.

Le marché économique d'un tel instrument de mesure est très concurrentiel. Les acheteurs potentiels de ces capteurs choisissent plusieurs critères pour évaluer les différentes propositions commerciales qui peuvent leur être faites.

**Q1.** Reproduire et compléter le tableau 4, en donnant les différents critères de performance et les niveaux associés du rugosimètre.

id	exigences	niveau
1	Le coût du rugosimètre doit être concurrentiel	< 10 000€
2	la précision de la mesure doit être...	
3		
4		
5		

TABLEAU 4 – Exigences à compléter

### C. Calculs prévisionnel des actionneurs

Les calculs d'avant projet doivent permettre de dimensionner les différents composants qui seront utilisés et de définir certains paramètres de réglages (paramètres d'asservissement ...).

Les calculs prévisionnels visent, dans un premier temps, à déterminer les équations dynamiques qui permettront de déterminer les couples moteurs (minimum) des différents actionneurs en fonction des caractéristiques géométriques, massiques et inertielles des pièces ainsi que des conditions d'utili-

sation. Dans toute cette partie, nous considérerons que seules l'unité de translation ( $\vec{x}$ ) et l'unité de rotation sont actionnées.

### C.1. Mise en place du problème

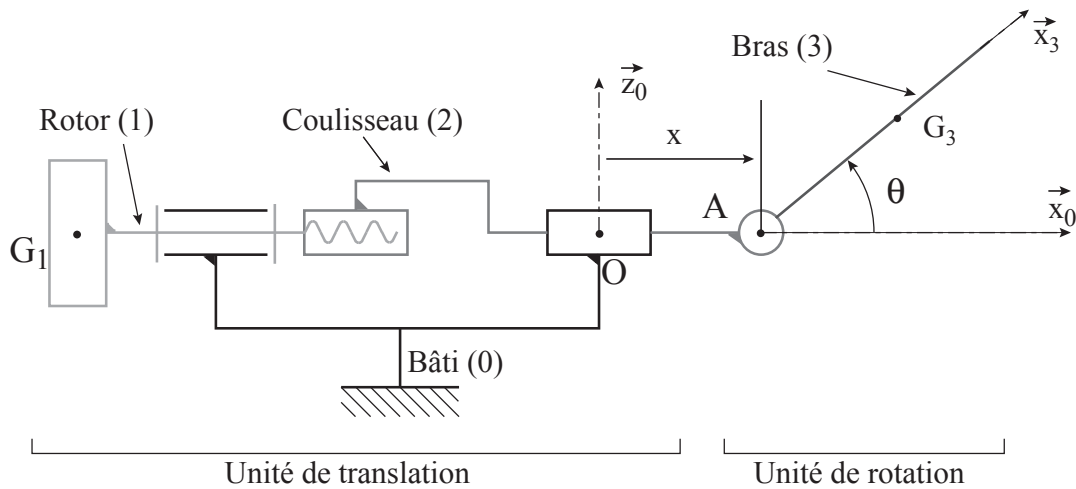


FIGURE 5 – Schéma paramétré du prototype du rugosimètre 2D (les actionneurs ne sont pas représentés)

La figure 5 présente le schéma et le paramétrage qui sera utilisé pour cette partie de l'étude. Ce système comporte quatre pièces :

- le bâti (0). On associe à cette pièce le repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  que l'on considère galiléen;
- le rotor (1) :
  - moment d'inertie selon l'axe  $(O, \vec{x}_0)$  noté  $J_1$  avec  $J_1 = 1 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$ ;
  - centre d'inertie  $(G_1)$ , avec  $\vec{OG}_1 = -a \cdot \vec{x}_0$ ;
  - la liaison pivot  $(L_{0/1})$  de paramètre angulaire  $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ , présente un frottement visqueux de coefficient  $f_1$ , créant un moment :  $\vec{M}_{O,0 \rightarrow 1} = -f_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_0$  (avec  $f_1 = 5 \times 10^{-5} \text{ Nm}/(\text{rads}^{-1})$ ) s'opposant au mouvement;
  - un moteur  $(M_1)$  gère le mouvement de rotation de (1) par rapport à (0). Le couple moteur appliqué sur (1) est noté :  $C_{\text{moteur} \rightarrow 1} = C_{m1} \cdot \vec{x}_0$
- le coulisseau (2) :
  - masse :  $m_2$  avec  $m_2 = 2 \text{ kg}$ , centre d'inertie  $(G_2)$ ;
  - la liaison hélicoïdale  $(L_{1/2})$  (supposée parfaite) possède un pas noté  $(p_a)$  ( $p_a = 0,5 \text{ mm}/\text{tour}$ , le pas est à droite (sens classique) );
  - la liaison glissière  $(L_{0/2})$  de paramètre de position (translation) est noté  $(x)$  :  $\vec{OA} = x \cdot \vec{x}_0$ , présente un frottement visqueux de coefficient  $f_2$ , créant une force :  $\vec{F}_{0 \rightarrow 2} = -f_2 \cdot \dot{x} \cdot \vec{x}_0$  ( $f_2 = 5 \text{ N}/(\text{ms}^{-1})$ );
- l'ensemble (3) :
  - masse :  $m_3$  (masse à déterminer à la question Q5), centre d'inertie  $(G_3)$  :  $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3$ ;
  - matrice d'inertie en (A) :  $[I(A, 3)] = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{A, B_3}$  avec  $B_3 = (\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ ;
  - la liaison pivot  $(L_{2/3})$ , de paramètre angulaire  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ , présente un frottement visqueux de coefficient  $f_3$ , créant un moment :  $\vec{M}_{A, 2 \rightarrow 3} = -f_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$ ;

- un moteur ( $M_3$ ) gère la rotation de l'ensemble (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté :  $C_{\text{moteur}3 \rightarrow 3} = C_{m3} \cdot \vec{y}_0$ ;
- un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ( $\theta = 0^\circ$ ) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur ( $M_3$ ) n'est pas alimenté. Ce système d'équilibrage exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté :  $\vec{C} = C_r \cdot \vec{y}_0$ , avec  $C_r = -(k_{\text{tors}} \cdot \theta + C_0)$ . Le terme  $C_0$  permet d'équilibrer le moment en (A) créé par l'action de pesanteur sur (3) lorsque ( $\theta = 0^\circ$ ).

**Q2.** Tracer le graphe des liaisons du mécanisme complet, préciser sur celui-ci les actions mécaniques.

**Q3.** Exprimer les quatre torseurs d'actions de liaison.

**Q4.** On s'intéresse à la boucle constituées des solides  $\{0, 1, 2\}$ . À partir d'une étude globale cinématique, évaluer le degré de mobilité et le degré d'hyperstaticité.

### C.2. Positionnement du centre d'inertie

Comme le montre la figure 6, l'ensemble (3) est constitué de plusieurs solides en liaison encastrement (*liaison complète*) :

- le bras (4) lié au moteur couple,
- la tête optique (5),
- un contrepoids (6). Ce contrepoids (6) a été ajouté pour assurer que le centre d'inertie ( $G_3$ ) soit sur l'axe  $(A, \vec{x}_3)$ .

**Remarque :** les moteurs couples sont spécialement conçus pour remplacer les ensembles moteurs à courant continu ou asynchrones et réducteurs. Conçus pour délivrer un couple élevé à basse vitesse sans aucun élément de transmission mécanique, leur utilisation résulte en un système d'entraînement plus compact, plus efficace d'un point de vue énergétique, et ne requérant aucune maintenance.

Les caractéristiques géométriques de l'ensemble étudié sont données ci-après :

- bras (4) du moteur couple : masse :  $m_4 = 1 \times 10^{-3}$  kg; centre d'inertie :  $\vec{AG}_4 = -b_4 \cdot \vec{y}_0$  avec  $b_4 = 4$  mm;
- tête optique (5) : masse :  $m_5 = 5 \times 10^{-3}$  kg; centre d'inertie :  $\vec{AG}_5 = a_5 \cdot \vec{x}_3 + b_5 \cdot \vec{y}_3 - c_5 \cdot \vec{z}_3$  avec  $a_5 = 40$  mm;  $b_5 = 0,8$  mm;  $c_5 = 10$  mm;
- contrepoids (6) : masse :  $m_6$  (à déterminer à la question Q5); centre d'inertie :  $\vec{AG}_6 = a_6 \cdot \vec{x}_3 + c_6 \cdot \vec{z}_3$  avec  $a_6 = 10$  mm;  $c_6 = 25$  mm.

**Q5.** Déterminez l'expression littérale de la masse du contrepoids (6) qui assure que le terme (c) de l'expression de la position du centre d'inertie ( $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \vec{y}_3 + c \cdot \vec{z}_3$ ) est nul. Réalisez l'application numérique. Montrez, que dans ce cas,  $r = 27,5$  mm, avec  $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3$ .

### C.3. Équations dynamiques

Le système étudié possède deux mobilités, il est donc nécessaire de déterminer deux équations pour pouvoir atteindre les grandeurs recherchées, le couple moteur dans l'actionneur de l'unité de rotation ( $C_{m3}$ ) et le couple moteur dans l'unité de translation ( $C_{m1}$ ) en fonction des caractéristiques dimensionnelles et matérielles des pièces, des lois de mouvement et des dissipations dans les liaisons.

Pour obtenir la première équation, vous êtes obligé d'appliquer la méthode demandée.

**Q6.** Détermination de  $C_{m3}$

**Q6a.** Isoler l'ensemble (3). Énoncer le théorème du moment dynamique appliqué sur le solide (3) en A en projection sur  $\vec{y}_0$

**Q6b.** Préciser les actions mécaniques extérieures

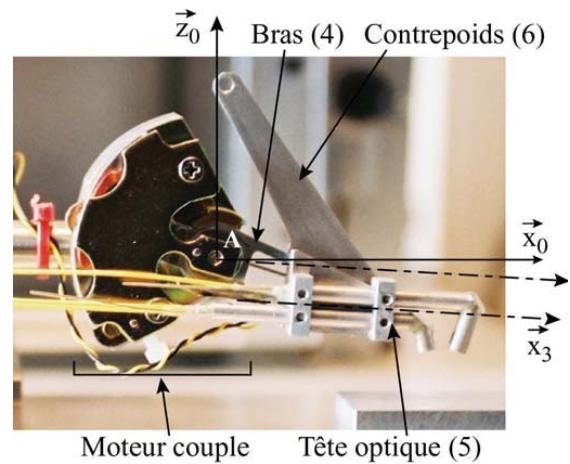


FIGURE 6 – Unité de rotation

**Q6c.** Déterminer  $\overrightarrow{V_{A \in 3/0}}$

**Q6d.** Déterminer le moment cinétique en A  $\overrightarrow{\sigma_{A,3/0}}$

**Q6e.** Déterminer le moment dynamique en A en projection sur  $\vec{y}_0$

**Q6f.** Écrire le théorème du moment dynamique en (A) en projection sur  $\vec{y}_0$

**Q6g.** Écrire obligatoirement votre résultat sous la forme  $d \cdot \ddot{\theta} + e \cdot \ddot{x} + f \cdot \dot{\theta} + g \cdot \theta = h$  (les termes  $d, e, f, g$  et  $h$  peuvent dépendre de  $\theta$ ).

Pour obtenir la seconde équation, on vous propose plusieurs stratégies d'étude :

— Isoler  $\{1, 2, 3\}$  écrire le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(G_1, \vec{x}_0)$ .

— Isoler  $\{2, 3\}$ , écrire le théorème de la résultante en projection suivant  $\vec{x}_0$ , puis isoler  $\{1\}$  et écrire le théorème du moment dynamique autour de  $(G_1, \vec{x}_0)$ .

— Isoler  $\{1, 2\}$  écrire le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(G_1, \vec{x}_0)$ .

— Une autre proposition !

**Q7.** Sans faire de calcul, donnez, très clairement et précisément, la démarche qui vous permet d'obtenir le couple moteur ( $C_{m1}$ ). Précisez quel(s) est(sont) le(s) système(s) étudié(s), quel(s) est(sont) le(s) théorème(s) ou principe(s) utilisés, quels sont les termes qu'il faut calculer. Justifiez clairement vos choix.

**Q8.** Réalisez les calculs, que vous avez présenté à la question précédente et donnez la relation recherchée. Dans cette équation, le paramètre ( $\varphi$ ), et ses dérivées ne doivent pas intervenir. Seules les paramètres ( $\theta$ ), ( $x$ ) et leurs dérivées sont autorisés.

Pour la suite, on admettra que les deux équations s'écrivent

$$B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \sin \theta + f_3 \cdot \dot{\theta} + K_{tor} \cdot \theta = C_{m3} + m_3 \cdot g \cdot r \cdot (\cos \theta - 1)$$
$$C_{m1} = -f_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} \cdot \dot{x} - f_2 \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{x} - \left( J_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} + (m_2 + m_3) \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \ddot{x} + m_3 \cdot \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \left( \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta \right)$$

#### C.4. Détermination des couples moteurs

Les deux équations ci-dessus sont des équations différentielles couplées et non linéaires. Pour résoudre, algébriquement ce système d'équations, nous allons étudier le mécanisme dans des conditions particulières.

Lorsque le point focal de la tête optique suit le profil moyen de la surface, l'angle ( $\theta$ ) varie au voisinage de  $0^\circ$ .

Nous montrerons (plus loin dans le sujet) que cette variation de position est d'amplitude très faible, et qu'en conséquence, il est possible de réaliser une linéarisation de ces équations au voisinage de  $0^\circ$  ( $\theta$  reste petit).

Nous supposons également que les termes de la forme  $a \cdot \ddot{\theta}$  et  $b \cdot \dot{\theta}^2$  sont négligeables devant le terme en  $\dot{x}$ .

La loi de commande de l'unité de translation est représentée à la figure 7. La vitesse nominale (constante) recherchée est notée ( $V_0$ ). L'accélération maximale est notée ( $A_{cMax}$ ).

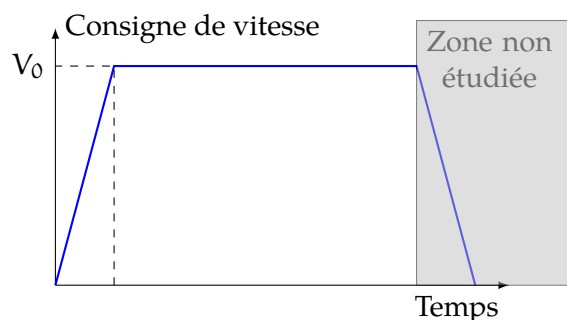


FIGURE 7 – Consigne de vitesse

**Q9.** En utilisant les simplifications mentionnées :

**Q9a.** Déterminez, dans la phase d'accélération, puis dans la phase de déplacement à vitesse constante, les expressions littérales de ( $C_{m1}$ ) et ( $C_{m3}$ ).

**Q9b.** Calculez la valeur du couple  $C_{m1}$  maximal ( $V_0 = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $A_{cMax} = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Le choix des moteurs ( $M_1$  et  $M_3$ ) se fera à partir d'un cahier des charges, dont le couple maximal transmissible par les moteurs est une des caractéristiques. Il existe bien d'autres spécifications comme, la vitesse et l'accélération maximale, la surintensité supportée, l'encombrement axial et longitudinal...

## D. Amélioration de l'unité de positionnement en (z)

Dans le prototype étudié, le positionnement vertical (en z) du point focal est obtenu par l'unité de rotation. Ceci a plusieurs conséquences négatives sur le fonctionnement global du capteur :

- modification de la position longitudinale du point de mesure. Lorsque la tête optique tourne, la mesure de (z) n'est pas réalisée à l'endroit désiré, ce qui induit une erreur dans la reconstruction de la surface ;
- modification de l'angle d'incidence des faisceaux optiques ;
- modification de la position de la tête optique lors des phases d'accélération et de freinage de l'unité de translation longitudinale

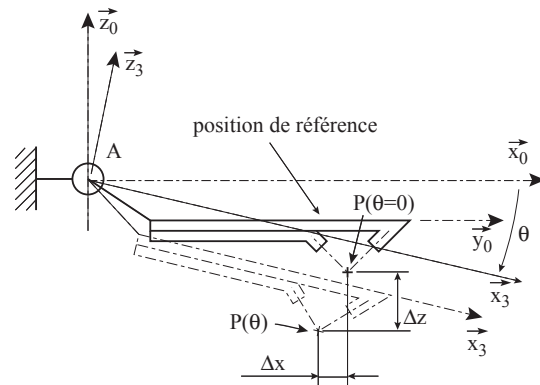


FIGURE 8 – Incidence sur le positionnement

### D.1. Étude de la position réelle longitudinale du point focal

Il vous est demandé, dans un premier temps, de quantifier l'écart de position longitudinale obtenu lorsque l'on utilise la totalité du débattement vertical. La figure 8 illustre le problème d'erreur de positionnement longitudinal ( $\Delta x$ ) créée par la rotation de la tête de mesure.

Données :  $\vec{AP} = a \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \vec{z}_3$  (avec  $a = 50 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ );  
 $\Delta x = x_P(\theta) - x_P(0)$ ;  $\Delta y = y_P(\theta) - y_P(0)$

Le cahier des charges de ce système impose une variation verticale (z) du point focal de  $\pm 5 \text{ mm}$  par rapport à la position de référence ( $\theta = 0^\circ$ ).

Position du point P :

**Q10.** Après avoir donné les expressions littérales des variations de position longitudinale ( $\Delta x = f(\theta, a, b)$ ) et verticale ( $\Delta z = g(\theta, a, b)$ ) du point focal en fonction de la rotation de la tête optique, linéarisez ces expressions afin d'obtenir une formule approchée donnant le rapport ( $\frac{\Delta x}{\Delta z} = h(a, b)$ ).

**Q11.** Donnez la valeur numérique du décalage longitudinal maximal.

**Q12.** Concluez quant à la réalité du problème soulevé précédemment : « modification de la position longitudinale du point de mesure ».

En plus de ce problème de position longitudinale du point focal, il y a aussi une modification de l'angle d'incidence et de réflexion des faisceaux optiques par rapport à la surface de la pièce qui correspond à une variation de  $(2 \cdot \theta)$ .

### D.2. Modification de l'unité de positionnement vertical du point

Afin de découpler les mouvements verticaux et longitudinaux du point focal lors des phases d'accélération et de freinage de l'axe longitudinal (x), et d'éviter la rotation de la tête optique, les concepteurs de ce capteur ont imaginé une autre chaîne cinématique pour le positionnement vertical du point focal.

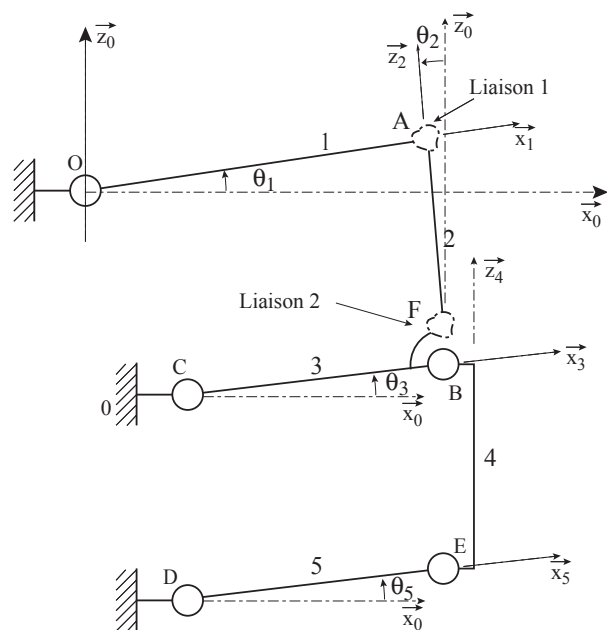


FIGURE 9 – Schéma cinématique de l'unité de positionnement vertical (sur cette figure ( $\theta_4 = 0^\circ$ ))

Les principales caractéristiques du moteur couple donnant satisfaction, les concepteurs désirent conserver ce système de motorisation.

La figure 9 représente le schéma cinématique plan du mécanisme envisagé.

La tête optique (non représentée sur ce schéma) sera fixée à la pièce (4).

Cette unité de positionnement vertical ( $z$ ) est composée de deux sous-ensembles :

- un système quatre barres (0, 3, 4, 5). Ce système permet le déplacement selon ( $\vec{z}_0$ ) de la tête optique qui est solidaire de (4) ;
- un système moteur (1, 2). L'axe de sortie du moteur couple est noté (1). La translation de la tête optique (4) est obtenue par la bielle (2) qui est liée à l'axe de sortie du moteur couple (en A) et à la pièce (3) en (F).

Ce mécanisme comporte cinq liaisons pivot (d'axe ( $O, \vec{y}_0$ ), ( $B, \vec{y}_0$ ), ( $C, \vec{y}_0$ ), ( $D, \vec{y}_0$ ), ( $E, \vec{y}_0$ )) et deux liaisons qu'il convient de définir.

Données :

$$\vec{OA} = l_1 \cdot \vec{x}_1, \vec{FA} = l_2 \cdot \vec{z}_2, \vec{CB} = l_3 \cdot \vec{x}_3, \vec{CF} = l_3 \cdot \vec{x}_3 + b_3 \cdot \vec{z}_3,$$

$$\vec{DE} = l_5 \cdot \vec{x}_5, \vec{EB} = l_4 \cdot \vec{z}_4, \vec{CD} = -f \cdot \vec{z}_0, \vec{OC} = d \cdot \vec{x}_0 - e \cdot \vec{z}_0.$$

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta_1, (\vec{z}_0, \vec{z}_2) = \theta_2, (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = \theta_3, (\vec{z}_0, \vec{z}_4) = \theta_4, (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = \theta_5.$$

### Solution technique du système quatre barres

Dans un premier temps, nous étudierons le modèle quatre barres (0, 3, 4, 5) en cherchant à vérifier, que cette nouvelle cinématique permet d'empêcher la rotation de la tête optique (en liaison encastrement avec la pièce (4), puis à définir des solutions réelles pour les différentes liaisons.

**Q13.** Donnez la(les) relation(s) qu'il faut respecter entre les paramètres ( $l_3, l_4, l_5, , f$ ) pour que la tête optique (fixée à (4)) n'ait aucun mouvement de rotation par rapport à (0). Vous justifierez rapidement votre proposition.

**Q13a.** Quelle est la nature du mouvement entre (4) et (0) ?

**Q14.** Que pouvez-vous dire (sans calculs) du degré de mobilité et d'hyperstaticité du mécanisme 4 barres (0,3,4,5).

**Q14a.** Préciser les avantages et inconvénients d'un mécanisme hyperstatique.

### Transmission du mouvement entre le moteur couple et la tête optique

La seconde partie du mécanisme est un transmetteur, qui permet le déplacement de la pièce (4) à partir du mouvement de rotation du moteur couple. Pour ce mécanisme, le concepteur a choisi une disposition géométrique particulière : en position de référence, les angles  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et  $\theta_4$  sont tous nuls.

**Q15.** Quelles sont les raisons qui ont conduit le concepteur de ce mécanisme à choisir cette disposition ?

On désire que le mécanisme (de transmission de mouvement) (0, 1, 2, 3) soit isostatique.

**Q16.** Proposez, en justifiant votre réponse, une solution (liaison 1 et liaison 2) permettant d'obtenir un modèle de mécanisme (0, 1, 2, 3) isostatique.



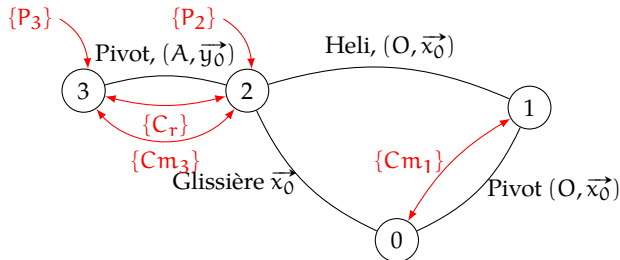
Cor. 1 : Étude dynamique d'un rugosimètre

Sujet page 1

Q1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les différents critères de performance et les niveaux associés du rugosimètre.

id	exigences	niveau
1	Le coût du rugosimètre doit être concurrentiel	< 10 000€
2	résolution verticale des hautes fréquences spatiales	10 nm
3	amplitude de lecture du capteur optique	20 μm
4	résolution verticale des basses fréquences spatiales	10 mm
5	vitesse horizontale de déplacement du point focal	20 mm · s <sup>-1</sup>

Q2. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme complet, préciser sur celui-ci les actions mécaniques.



Q3. Exprimer les quatre torseurs d'actions de liaison.

- Pivot (O,  $\vec{x}_0$ ) :  $\{A_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & -f_1 \cdot \dot{\phi} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{O, (\vec{x}_0, ?, ?)}$
- Hélicoïdale, (O,  $\vec{x}_0$ ) :  $\{A_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{O, (\vec{x}_0, ?, ?)}$
- avec  $L_{12} = -\frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot X_{12}$ .
- Glissière  $\vec{x}_0$  :  $\{A_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -f_2 \cdot \dot{x} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{Bmatrix}_{yP, (\vec{x}_0, ?, ?)}$
- Pivot, (A,  $\vec{y}_0$ ) :  $\{A_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & -f_3 \cdot \dot{\theta} \\ Z_{23} & M_{23} \end{Bmatrix}_A, (\vec{y}, \vec{z}, \vec{z}_0)$

Q4. On s'intéresse à la boucle constituées des solides {0, 1, 2}. À partir d'une étude globale cinématique, évaluer le degré de mobilité et le degré d'hyperstaticité.

- Une seule boucle  $E_c = 6$
- 3 liaisons  $I_c = 1 + 1 + 1 = 3$
- une seule mobilité : la rotation du rotor 1 entraîne la rotation de la vis et le déplacement du coulisseau en translation :  $m = 1$

On a  $m - h = I_c - E_c$  d'où  $h = 1 - 3 + 6 = 4$  le mécanisme est fortement hyperstatique, pour que le système fonctionne, la glissière doit être parallèle à la liaison pivot.

Q5. Déterminez l'expression littérale de la masse du contre-poids (6) qui assure que le terme (c) de l'expression de la position du centre d'inertie ( $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \vec{y}_3 + c \cdot \vec{z}_3$ ) est nul. Réalisez l'application numérique.

Montrez, que dans ce cas,  $r = 27,5$  mm, avec  $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3$ .

L'ensemble (3) est constitué de plusieurs solides en liaison encastrement :

- le bras (4) lié au moteur couple,
- la tête optique (5),
- un contre-poids (6).

Ce contre-poids (6) a été ajouté pour assurer que le centre d'inertie ( $G_3$ ) soit sur l'axe (A,  $\vec{x}_3$ ).

$$\vec{AG}_3 = \frac{1}{m_4 + m_5 + m_6} (m_4 \cdot \vec{AG}_4 + m_5 \cdot \vec{AG}_5 + m_6 \cdot \vec{AG}_6)$$

$$\vec{AG}_3 = \frac{1}{m_4 + m_5 + m_6} \cdot ((m_5 \cdot a_5 + m_6 \cdot a_6) \cdot \vec{x}_3 + (-m_4 \cdot b_4 + m_5 \cdot b_5) \cdot \vec{y}_3 + (-m_5 \cdot c_5 + m_6 \cdot c_6) \cdot \vec{z}_3)$$

Le point  $G_3$  se situe dans le plan (A,  $\vec{x}_3, \vec{y}_3$ ) si

$$c = \frac{-m_5 \cdot c_5 + m_6 \cdot c_6}{m_4 + m_5 + m_6} \Rightarrow m_6 = m_5 \cdot \frac{c_5}{c_6}$$

$$c = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$$

On vérifie que  $b = 0$

Et pour  $r$

$$r = \frac{m_5 \cdot a_5 + m_6 \cdot a_6}{m_4 + m_5 + m_6} = 27,5 \text{ mm}$$

Q6. Détermination de  $C_{m3}$

Q6a. Isoler l'ensemble (3), Énoncer le théorème du moment dynamique appliqué sur le solide (3) en A en projection sur  $\vec{y}_0$

$$\vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 = \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{A,2 \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{A,Cm \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0 + \vec{M}_{A,Cr \rightarrow 3} \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 = -f_3 \cdot \dot{\theta} + (\vec{AG}_3 \wedge (-m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0)) \cdot \vec{y}_0 + Cm_3 + C_r$$

$$\vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 = -f_3 \cdot \dot{\theta} + m_3 \cdot g \cdot r \cos \theta + Cm_3 - (K_{tor} \cdot \theta + C_0)$$

Q6b. Préciser les actions mécaniques extérieures

Cf. au-dessus

Q6c. Déterminer  $\vec{V}_{A \in 3/0}$

$$\vec{V}_{A \in 3/0} = \vec{V}_{A \in 3/2} + \vec{V}_{A \in 2/0} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

Q6d. Déterminer le moment cinétique en A  $\vec{\sigma}_{A,3/0}$ .

Le point A n'est pas un point fixe, ni le centre d'inertie!

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{A,3/0} &= [I(A,3)] \cdot \vec{\Omega}_{3/0} + m_3 \cdot \vec{AG}_3 \wedge \vec{\Delta}_{3/0} \\ &= \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{A,B_3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + m_3 \cdot r \cdot \vec{x}_3 \wedge \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \sin \theta) \cdot \vec{y}_0 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3\end{aligned}$$

**Q6e.** Déterminer le moment dynamique en A en projection sur  $\vec{y}_0$

$$\vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 = \left( \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,3/0} \right]_0 + m_3 \cdot \vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0} \right) \cdot \vec{y}_0$$

Avec

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,3/0} \right]_0 \cdot \vec{y}_0 &= \frac{d \vec{\sigma}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0}{dt} - \vec{\sigma}_{A,3/0} \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{y}_0 \right]_0 \\ &= B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot (\ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cos \theta)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0}) &= \vec{V}_{A/0} \wedge (\vec{V}_{A \in 3/0} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{AG}_3) \\ (\vec{V}_{A/0} \wedge \vec{V}_{G_3 \in 3/0}) &= \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \wedge (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) \\ &= r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} \cos \theta \cdot \vec{y}_0\end{aligned}$$

finalement

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 &= B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot (\ddot{x} \sin \theta + \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cos \theta) \\ &\quad + m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{x} \cos \theta \\ \vec{\delta}_{A,3/0} \cdot \vec{y}_0 &= B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \sin \theta\end{aligned}$$

**Q6f.** Écrire le théorème du moment dynamique en (A) en projection sur  $\vec{y}_0$   
d'où

$$B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \sin \theta = -f_3 \cdot \dot{\theta} + m_3 \cdot g \cdot r \cos \theta + C m_3 - (K_{\text{tor}} \cdot \theta + C_0)$$

À l'équilibre on peut écrire  $\theta = 0, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$  et  $C m_3 = 0$  :

$$0 = m_3 \cdot g \cdot r - C_0$$

**Q6g.** Écrire obligatoirement votre résultat sous la forme  $d \cdot \ddot{\theta} + e \cdot \ddot{x} + f \cdot \dot{\theta} + g \cdot \theta = h$  (les termes d, e, f, g et h peuvent dépendre de  $\theta$ ).

l'équation devient :

$$B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \sin \theta + f_3 \cdot \dot{\theta} + K_{\text{tor}} \cdot \theta = C m_3 + m_3 \cdot g \cdot r \cdot (\cos \theta - 1)$$

**Q7.** Sans faire de calcul, donnez, très clairement et précisément, la démarche qui vous permet d'obtenir le couple moteur ( $C_{m1}$ ). Précisez quel(s) est(sont) le(s) système(s) étudié(s), quel(s) est(sont) le(s) théorème(s) ou principe(s) utilisés, quels sont les termes qu'il faut calculer. Justifiez clairement vos choix.

**Isoler {2,3}** écrire le théorème de la résultante dynamique en projection suivant  $\vec{x}_0$ ,

- le mvt est globalement une translation de direction  $\vec{x}_0$  par rapport à 0,

- liaison glissière entre 0 et 2, seul les frottements interviennent les autres inconnues n'interviennent pas,

- la liaison entre 2 et 3 est une liaison intérieure, les efforts de liaisons n'interviennent donc pas,

- la seule action de liaison qui va intervenir est la composante suivant  $\vec{x}_0$  de la liaison hélicoïdale.

**Isoler {1}** écrire le théorème du moment dynamique autour de l'axe  $(G, \vec{x}_0)$

- le mouvement de (1) est une rotation d'axe  $(G, \vec{x}_0)$ ,

- les inconnues de liaisons de la liaison pivot n'interviennent pas, seuls les frottements interviennent.

- seul le moment autour  $(G, \vec{x}_0)$  de la liaison hélicoïdale intervient,

- le moment de la liaison hélicoïdale est lié par le pas de vis à la composante suivant  $\vec{x}_0$  de la résultante.

**Q8.** Réalisez les calculs, que vous avez présenté à la question précédente et donnez la relation recherchée. Dans cette équation, le paramètre ( $\varphi$ ), et ses dérivées ne doivent pas intervenir. Seules les paramètres ( $\theta$ ), ( $x$ ) et leurs dérivées sont autorisés.

On isole  $\Sigma = \{2,3\}$  :

Actions mécaniques extérieures

- Glissière  $\vec{x}_0 : \{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -f_2 \cdot \dot{x} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{Bmatrix}_{\text{VP}} (\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$

- Hélicoïdale,  $(O, \vec{x}_0) : \{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_O (\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})$

avec  $L_{12} = -\frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot X_{12}$ .

- Poids :  $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3}$

- Poids :  $\{\mathcal{P}_{g \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$

On écrit le théorème de la résultante suivant  $\vec{x}_0$

$$\begin{aligned}M_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{G_\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 &= \vec{R}_{0 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 + \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 \\ &\quad + \vec{P}_{g \rightarrow 2} \cdot \vec{x}_0 + \vec{P}_{g \rightarrow 3} \cdot \vec{x}_0 \\ M_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{G_\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 &= X_{12} - f_2 \cdot \dot{x}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}M_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{G_\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 &= m_2 \cdot \vec{\Gamma}_{G_2 \in 2/0} \cdot \vec{x}_0 + m_3 \cdot \vec{\Gamma}_{G_3 \in 3/0} \cdot \vec{x}_0 \\ M_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{G_\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 &= m_2 \cdot \ddot{x} \\ &\quad + m_3 \cdot (\ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_0\end{aligned}$$

$$M_\Sigma \cdot \vec{\Gamma}_{G_\Sigma \in \Sigma/0} \cdot \vec{x}_0 = m_2 \cdot \ddot{x} + m_3 \ddot{x} - r \cdot \ddot{\theta} \sin \theta - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta$$

finalement

$$\begin{aligned}(m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \sin \theta \\ - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta &= X_{12} - f_2 \cdot \dot{x}\end{aligned}$$

d'où

$$X_{12} = (m_2 + m_3) \ddot{x} + f_2 \cdot \dot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \sin \theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

On isole {1} :

Actions mécaniques :

— Hélicoïdale :

$$(O, \vec{x}_0) : \{A_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -X_{12} & -L_{12} \\ -Y_{12} & -M_{12} \\ -Z_{12} & -N_{12} \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}}$$

$$\text{avec } L_{12} = -\frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot X_{12}.$$

$$\text{— Pivot } (O, \vec{x}_0) : \{A_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & -f_1 \cdot \dot{\phi} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}_0, \vec{y}, \vec{z})}}$$

$$\text{— Poids } : \{P_{g \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$$

$$\text{— Couple moteur } \{C_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m1} \cdot Vx[0] \end{Bmatrix}_{VP}$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{G_1,1/0} &= \vec{M}_{G_1,0 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{G_1,2 \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 \\ &\quad + \vec{M}_{G_1,g \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}_{G_1,Cm \rightarrow 1} \cdot \vec{x}_0 \\ J_1 \cdot \ddot{\phi} &= -f_1 \cdot \dot{\phi} - L_{12} + 0 + C_{m1} \end{aligned}$$

d'où

$$C_{m1} = J_1 \cdot \ddot{\phi} + f_1 \cdot \dot{\phi} - \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot X_{12}$$

À partir des deux équations

$$\begin{cases} X_{12} = (m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} + f_2 \cdot \dot{x} \\ \quad - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \sin \theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta \\ C_{m1} = J_1 \cdot \ddot{\phi} + f_1 \cdot \dot{\phi} - \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot X_{12} \end{cases}$$

On déduit  $C_{m1}$  en fonction des actions mécaniques extérieures.

**Q9.** En utilisant les simplifications mentionnées,

**Q9a.** Déterminez, dans la phase d'accélération, puis dans la phase de déplacement à vitesse constante, les expressions littérales de ( $C_{m1}$ ) et ( $C_{m3}$ ).

Simplifions d'abord les équations

$$\begin{aligned} C_{m3} &= B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \sin \theta + f_3 \cdot \dot{\theta} \\ &\quad + K_{tor} \cdot \theta - m_3 \cdot g \cdot r \cdot (\cos \theta - 1) \\ C_{m1} &= -f_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} \cdot \dot{x} - f_2 \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{x} \\ &\quad - \left( J_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} + (m_2 + m_3) \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \ddot{x} \\ &\quad + m_3 \cdot \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \left( \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta \right) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} C_{m3} &= -m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \cdot \theta + K_{tor} \cdot \theta \\ C_{m1} &= -f_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} \cdot \dot{x} - f_2 \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{x} \\ &\quad - \left( J_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} + (m_2 + m_3) \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot \ddot{x} \end{aligned}$$

Pendant la phase à vitesse constante

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V_0 \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_{m3} &= +K_{tor} \cdot \theta \\ C_{m1} &= - \left( f_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} + f_2 \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot V_0 \end{aligned}$$

Pendant la phase d'accélération

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= A_{cMax} \\ \dot{x} &= A_{cMax} \cdot t \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} C_{m3} &= -m_3 \cdot r \cdot A_{cMax} \cdot \theta + K_{tor} \cdot \theta \\ C_{m1} &= - \left( f_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} - f_2 \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot A_{cMax} \cdot t \\ &\quad - \left( J_1 \frac{2 \cdot \pi}{p_a} + (m_2 + m_3) \frac{p_a}{2 \cdot \pi} \right) \cdot A_{cMax} \cdot t \end{aligned}$$

**Q9b.** Calculez la valeur du couple  $C_{m1}$  maximal ( $V_0 = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $A_{cMax} = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

pour  $V_0 = A_{cMax} \cdot t$  soit  $t = 1$  second

On obtient alors pour  $t = 1$  second

$$C_{m1} = -0,128 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**Q10.** Position du point P :

**Q10a.** Après avoir donné les expressions littérales des variations de position longitudinale ( $\Delta x = f(\theta, a, b)$ ) et verticale ( $\Delta z = g(\theta, a, b)$ ) du point focal en fonction de la rotation de la tête optique, linéarisez ces expressions afin d'obtenir une formule approchée donnant le rapport  $\left(\frac{\Delta x}{\Delta z} = h(a, b)\right)$ .

**Q10b.** Donnez la valeur numérique du décalage longitudinal maximal.

**Q10c.** Concluez quant à la réalité du problème soulevé précédemment : « modification de la position longitudinale du point de mesure ».

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= a \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \vec{z}_3 \\ &= (a \cos \theta - b \sin \theta) \cdot \vec{x}_0 + (-a \sin \theta - b \cos \theta) \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

on pose

$$\begin{aligned} \Delta x &= a \cos \theta - b \sin \theta - a \\ \Delta z &= -a \sin \theta - b \cos \theta - b \end{aligned}$$

si considère  $\theta$  petit

$$\begin{aligned} \Delta x &\approx -b \cdot \theta \\ \Delta z &\approx -b \cdot \theta \end{aligned}$$

d'où le rapport

$$\frac{\Delta x}{\Delta z} \approx \frac{b}{a}$$

ce qui donne comme déplacement  $\Delta x_{max}$

$$\Delta x_{max} = \frac{b}{a} \cdot \Delta z_{max} \approx 1,5 \text{ mm}$$

**Q11.** Donnez la(les) relation(s) qu'il faut respecter entre les paramètres ( $\ell_3, \ell_4, \ell_5, , f$ ) pour que la tête optique (fixée à (4)) n'ait aucun mouvement de rotation par rapport à (0). Vous justifierez rapidement votre proposition.

(CBEF) doit former un parallélogramme déformable soit  $\ell_3 = \ell_5$  et  $f = \ell_4$ .

**Q11a.** Quelle est la nature du mouvement entre (4) et (0)?

Le mouvement de 4 par rapport à 0 est alors un mouvement de translation circulaire.

**Q12.** Que pouvez-vous dire (sans calculs) du degré de mobilité et d'hyperstaticité du mécanisme 4 barres (0,3,4,5).

Le mécanisme ne comporte qu'un seul mouvement possible,  $m = 1$

$$m - h = I_c - E_c$$

$$1 - h = 4 - 6 \quad 4 \text{ liaisons pivots}$$

d'où

$$h = 3$$

**Q12a.** Préciser les avantages et inconvénients d'un méca-

nisme hyperstatique.

Un mécanisme hyperstatique est plus rigide mais plus difficile à réaliser.

**Q13.** Quelles sont les raisons qui ont conduit le concepteur de ce mécanisme à choisir cette disposition?

Les angles étant toujours petits, rester autour de 0, permettra de linéariser le fonctionnement.

**Q14.** Proposez, en justifiant votre réponse, une solution (liaison 1 et liaison 2) permettant d'obtenir un modèle de mécanisme (0, 1, 2, 3) isostatique.

On peut soit

- installer deux liaisons sphériques, le mécanisme devient isostatique mais possède une mobilité supplémentaire
- une pivot et une sphère cylindre.