DM de Noël

Exercice 1 - Robot Sirtes
Extrait du concours 3ème année ENS Cachan - 1997 *Corrigé page 7*

A. Données

On considère le problème de l'asservissement en position de l'axe 3 (coude) du robot Sirtes.

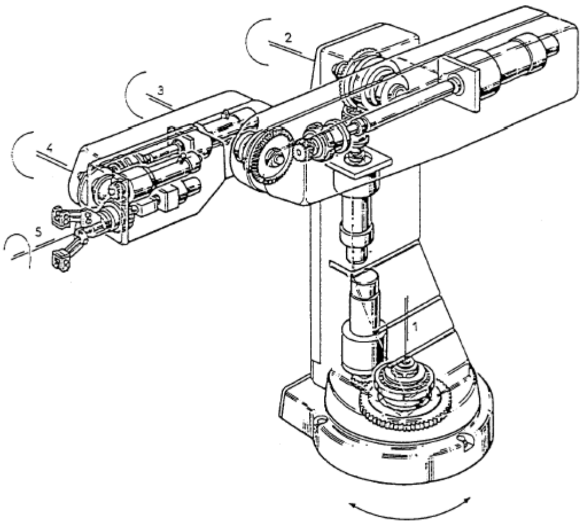


FIGURE 1 – Robot Sirtes

L'actionneur mis en œuvre est un moteur à courant continu à aimant permanent que l'on peut modéliser par les équations suivantes : avec

$$u(t) = R.i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t)$$
$$e(t) = K_e \cdot \omega(t)$$
$$\Gamma(t) = K_c \cdot i(t),$$
$$J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt} = \Gamma(t)$$

— $u(t)$ tension d'induit ;
— $i(t)$ courant d'induit ;
— $\omega(t)$ vitesse de rotation ;
— $\Gamma(t)$ couple moteur ;
— $e(t)$ fcem ;
— K_c constante de couple ;
— K_e constante de fcem ;
— R résistance d'induit ;
— J inertie ramenée sur l'arbre moteur.

La technique examinée ici est basée sur la synthèse de boucles de régulation successives.

B. Modélisation

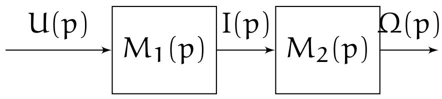
Q1. Donner le schéma bloc représentant la fonction de transfert du moteur avec $u(t)$ comme grandeur d'entrée et $\omega(t)$ comme grandeur de sortie.

Q2. Calculer la fonction de transfert du moteur $M(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$.

Q3. Mettre sous forme canonique et faire l'application numérique :

— $R = 1{,}4\,\Omega$,
— $L = 2 \times 10^{-3}\,H$,
— $K_c = 0{,}1\,N \cdot A^{-1}$,
— $K_e = 0{,}1\,V/(rad/s)$,
— $J = 5 \times 10^{-5}\,kg \cdot m^2$.

Q4. Donner une représentation fictive de $M(p)$ sous la forme ci-dessous. Déterminer $M_1(p)$ et $M_2(p)$ sous une forme littérale.

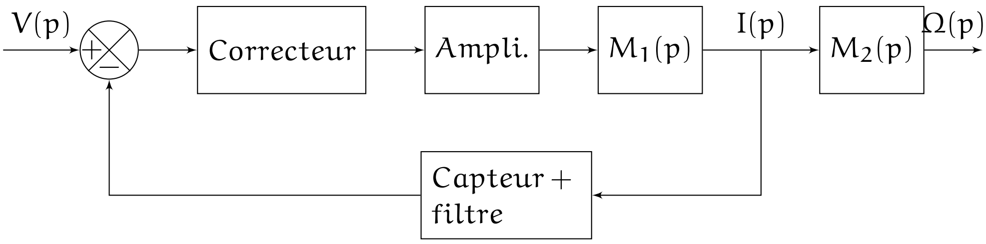


Q5. Montrer que $M_1(p) = \dfrac{500p}{(p+500)\cdot(p+200)}$ et $M_2(p) = \dfrac{2000}{p}$.

Pour la suite, on conservera cette forme.

C. Boucle de courant

Pour éviter des pics prohibitifs du courant dans l'induit (et dans le convertisseur), on effectue un bouclage sur le courant comme le montre la figure suivante.



Le capteur de courant dans la boucle de retour est une sonde à effet Hall associée à un filtre pour atténuer les ondulations du courant dues à la MLI (modulation de largeur d'impulsions). La fonction de transfert de cet ensemble est donnée par $R(p) = \dfrac{k}{(1+T_f p)}$ avec $T_f = 0{,}5\,\text{ms}$. L'amplificateur de puissance possède un gain $K_a = 10$. Le correcteur est du type PI (proportionnel et intégral) ayant comme fonction de transfert $Ci(p) = k_i\left(1 + \dfrac{1}{T_i \cdot p}\right)$, avec $k_i = 2$ et $T_i = 2\,\text{ms}$.

Q6. Déterminer la fonction de transfert en chaîne directe de la boucle de courant puis la fonction de transfert en boucle ouverte (il est judicieux ici de faire les calculs à partir des valeurs numériques).

Q7. Donner l'expression littérale de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{I(p)}{V(p)}$.

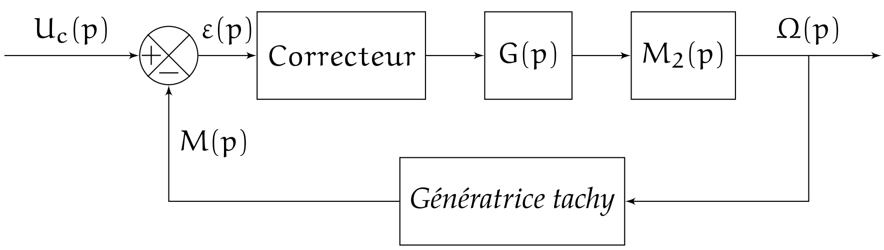
Q8. Application numérique : mettre $G(p)$ sous la forme $\dfrac{K_G \cdot N(p)}{D(p)}$ avec $N(p)$ un polynôme du premier ordre et $D(p)$ un polynôme du second ordre, les deux polynômes seront mis sous forme canonique.

Q9. Déterminer la valeur du paramètre k permettant d'assurer, pour $G(p)$, un coefficient d'amortissement $z = 0,5$. Déduire dans ce cas la pulsation propre ω_o du système du second ordre et son gain statique K_G.

Pour la suite on prendra : $G(p) = 10000\dfrac{2000+p}{p^2 + 2200\cdot p + 4840000}$

D. Boucle de vitesse

On réalise une régulation de la vitesse sous la forme donnée par la figure ci dessous.



La génératrice tachymétrique est modélisée par une transmittance constante de $K_t = 0{,}1\,\text{V/rad/s}$. La fonction de transfert du correcteur est notée $C_v(p)$. On prendra $C_v(p) = K_v$ (correcteur proportionnel).

Q10. Préciser l'unité de $U_c(p)$ et de $M(p)$.

Q11. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p) = \dfrac{M(p)}{\varepsilon(p)}$.

Q12. Tracer l'allure des diagrammes de Bode (asymptotes et courbe) de la FTBO avec $K_v = 1$. Préciser la marge de gain et la marge de phase.

Q13. Déterminer graphiquement, pour quelles valeurs de K_v le système est stable.

Q14. Calculer l'erreur indicielle.

Q15. Calculer l'erreur de vitesse (erreur permanente pour une entrée en rampe) dans ce système asservi. Déduire ainsi la valeur de K_v permettant de limiter cette erreur à 1 %.

Dans la suite du problème on supposera que la fonction de transfert, en boucle fermée, du système régulé en vitesse est donnée par

$$H_v(p) = 2420000\frac{2000+p}{(p+100)\,(p^2+2100\,p+4840000)}$$

E. Boucle de position

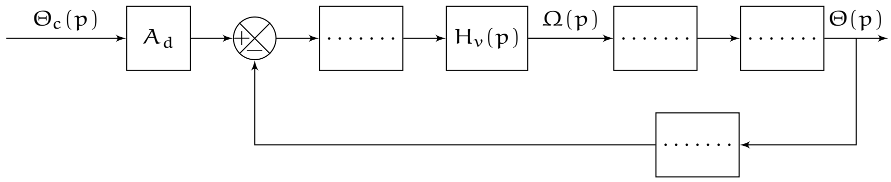


FIGURE 2 – Schéma-blocs de l'asservissement de position du robot Sirtes

On cherche à asservir la position (l'angle θ) de l'axe. On dispose pour cela d'un réducteur placé entre l'axe moteur et le bras avec un rapport de réduction $r = \dfrac{\omega_b(t)}{\omega(t)} = \dfrac{1}{20}$ ($\omega_b(t)$, la vitesse de rotation du bras) et d'un capteur de position (potentiomètre, fournissant une tension de 1 V pour une rotation de 1 rad).

Q16. Compléter le schéma bloc du système asservi en position avec un correcteur série notée $C_p(p)$. La sortie du correcteur doit fournir la consigne pour la boucle de vitesse. Proposer une valeur pour le bloc A_d.

Q17. Pour $C_p(p) = 1$, donner l'allure de la réponse en fréquence (asymptotes et courbes) du processus (FTBO) dans le plan de Bode (on tracera le diagramme entre 0,01 rad/s et 10 000 rad/s).

Q18. À partir de ce dernier diagramme, que peut-on conclure sur la stabilité du système non corrigé ?

Q19. Proposer un correcteur permettant si nécessaire d'améliorer la stabilité.

F. Étude Informatique complémentaire (à rendre la semaine prochaine)

F.1. Étude algébrique préalable

Le critère de Routh est un critère algébrique qui permet de déterminer le signe des racine d'un polynôme, le critère est présenté en annexe page 4.

Q20. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H_v(p) = \dfrac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)}$.

Q21. À partir de la description en annexe, construire le tableau de Routh.

Q22. Retrouver la condition de stabilité sur K_v.

F.2. Etude Informatique

Q23. Écrire le code python qui à partir des coefficients du polynôme du dénominateur de degré n ($[b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_2, b_1, b_0]$) construit le tableau de Routh et retourne le booléen, stable /instable.

Q24. Vérifier la stabilité de $H_v(p) = 2420000\dfrac{2000+p}{(p+100)\,(p^2+2100\,p+4840000)}$.

G. Annexes

A-1. Critère de Routh

Le critère de Routh est un critère algébrique permettant de déterminer à partir du polynôme du dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation $D(p) = 0$.

Pour une fonction de transfert en boucle fermée s'écrivant,

$$BF(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a_m \cdot p^m + a_{m-1} \cdot p^{m-1} + .. + a_1 \cdot p^1 + a_0}{b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot p^1 + b_0},$$

on déduit l'équation caractéristique :

$$D(p) = 0$$
$$b_n \cdot p^n + b_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot p^1 + b_0 = 0.$$

Condition nécessaire

Énoncé (Condition nécessaire de stabilité) *Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que b_n. Cette condition est une condition suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre.*

Tableau de Routh

Le critère de Routh permet de déterminer le signe des racines d'un polynôme à partir du tableau 2 construit à partir des coefficients du polynôme. On ordonne les lignes suivant les puissances décroissantes du polynôme de p^n à p^0.

Les deux premières lignes sont constituées des coefficients du polynôme :

— La première est constituée des coefficients de même parité que le degré n du polynôme, rangés suivant les puissances décroissantes ;

— La deuxième est constituée des coefficients de même parité que $n-1$, rangés suivant les puissances décroissantes.

Remarque : le tableau 2 est construit pour un polynôme de degré pair, pour un polynôme de degré impair les deux premières lignes se terminent différemment (le terme en p^0 est sur la seconde ligne).

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	...	...	b_3	b_1
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	...	...	b_2	b_0

p^n	$A_{11} = b_n$	$A_{12} = b_{n-2}$	$A_{13} = b_{n-4}$	...	...	$A_{1k} = b_2$	$A_{1l} = b_0$
p^{n-1}	$A_{21} = b_{n-1}$	$A_{22} = b_{n-3}$	$A_{23} = b_{n-5}$	...	...	$A_{2k} = b_1$	0
p^{n-2}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	...	...	...	0
p^{n-3}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	...	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	0	0
	$A_{(i-2)1}$	$A_{(i-2)2}$	...	...	$A_{(i-2)(j+1)}$	0	0
	$A_{(i-1)1}$	$A_{(i-1)2}$	...	...	$A_{(i-1)(j+1)}$	0	0
p^{n-i+1}	$\vdots$	$\vdots$	...	A_{ij}	$\vdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	...	0	0
p^1	$A_{(n-1)1}$	$A_{(n-1)2}$	0	0	0	0	0
p^0	$A_{n1} = b_0$	0	0	0	0	0	0

Tableau 2 – Tableau de Routh

Les coefficients de la troisième ligne sont calculés comme suit :

$$A_{31} = \frac{-1}{A_{21}} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{-1}{b_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{-\left(b_n \cdot b_{n-3} - b_{n-1} \cdot b_{n-2}\right)}{b_{n-1}}$$

le suivant :

$$A_{32} = \frac{-1}{A_{21}} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} = \frac{-1}{b_{n-1}} \cdot \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix}$$

Pour la ligne suivante :

$$A_{41} = \frac{-1}{A_{31}} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \qquad A_{42} = \frac{-1}{A_{31}} \cdot \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Pour le terme de la ligne i et de la colonne j :

$$A_{ij} = \frac{-1}{A_{(i-1)1}} \cdot \begin{vmatrix} A_{(i-2)1} & A_{(i-2)(j+1)} \\ A_{(i-1)1} & A_{(i-1)(j+1)} \end{vmatrix}$$

On poursuit le remplissage jusqu'à la ligne p^0.

La première colonne est appelée colonne des pivots et le terme $A_{(i-1)1}$ est le pivot de tous les termes de la ligne i.

On remarquera que :

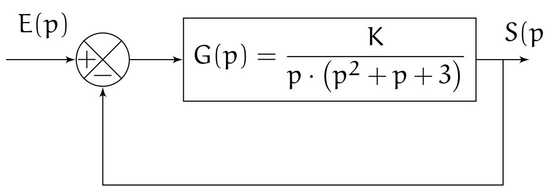
- les termes du triangle inférieur droit sont nuls ;
- que le terme b_0 se propage (une ligne sur deux) le long de la diagonale du triangle jusqu'à la ligne p^0.

Énoncé (Critère de Routh) *Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont du même signe que* $A_{11} = b_n$ *. Il y a autant de racines à partie réelles positives que de changement de signe dans la colonne des pivots.*

Le critère de Routh, est un critère de stabilité absolue, il ne permet pas de préciser les marges de stabilité du système.

Remarque : le critère de Routh est très utile lorsque les coefficients du polynôme sont des paramètres de réglage de l'asservissement pour déterminer les valeurs limites de ces paramètres comme sur l'exemple ci-dessous.

Exemple



$$BF(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)}$$
$$= \frac{K}{p^3 + p^2 + 3 \cdot p + K}$$

On construit le tableau de Routh

$$\begin{array}{c|c|c} p^3 & 1 & 3 \\ p^2 & 1 & K \\ p^1 & A_{31} & 0 \\ p^0 & K & 0 \end{array} \quad \text{et } A_{31} = \frac{-1}{1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & K \end{vmatrix} = 3 - K$$

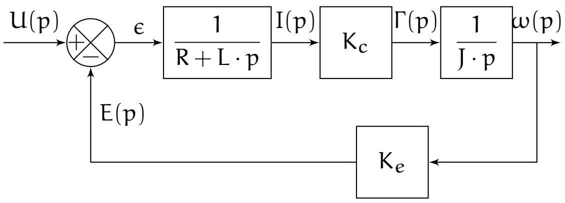
Le système est donc stable pour $0 < K < 3$.

0.0.1 Corrections

Cor. 1 : Robot Sirtes

Sujet page 1

Q1. Donner le schéma bloc représentant la fonction de transfert du moteur avec $u(t)$ comme grandeur d'entrée et $\omega(t)$ comme grandeur de sortie.



Q2. Calculer la fonction de transfert du moteur $M(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}$

Fonction de transfert : $M(p) = \dfrac{K_c}{J \cdot p(R + L \cdot p) + K_e \cdot K_c}$ soit en développant

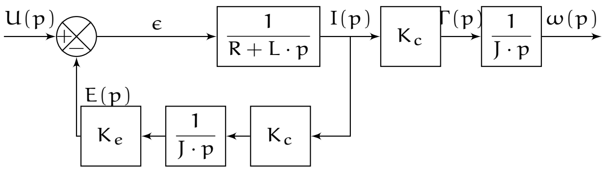
$$M(p) = \frac{K_c}{R \cdot J \cdot p + L \cdot J \cdot p^2 + K_e \cdot K_c}$$

Q3. Mettre sous forme canonique et faire l'application numérique :

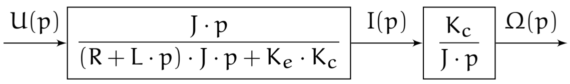
AN : $\dfrac{1000000}{p^2 + 700 \cdot p + 100000}$

Q4. Donner une représentation fictive de $M(p)$ sous la forme ci-dessous.
Déterminer $M_1(p)$ et $M_2(p)$ sous une forme littérale.

Représentation fictive : en mettant le schéma bloc sous la forme :



On déduit



avec

$M_1(p) = \dfrac{J \cdot p}{(R + L \cdot p) \cdot J \cdot p + K_e \cdot K_c}$

et

$M_2(p) = \dfrac{K_c}{J \cdot p}$

Q5. Montrer que $M_1(p) = \dfrac{500p}{(p + 500) \cdot (p + 200)}$ et $M_2(p) = \dfrac{2000}{p}$.

Application numérique : on retrouve bien les formes proposées.

Q6. Donner l'expression littérale de la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{I(p)}{V(p)}$.

Fonction de transfert $G(p)$

$$G(p) = \frac{C_i(p) \cdot K_a \cdot M_1(p)}{1 + C_i(p) \cdot K_a \cdot M_1(p) \cdot R(p)} = \frac{N_G(p)}{D_G(p)}$$

Le numérateur s'écrit :

$$N_G(p) = (T_f\, p + 1) J K_a \left(T_i p + 1\right) k_i$$

et le dénominateur

$$\begin{aligned} D_G(p) = & T_i \cdot LTfp^3 + T_i J\big(RT_f + L\big)p^2 \\ & + T_i\big(JR + K_e KcT_f + k_i K_a Jk\big)p \\ & + T_i K_e K_c + k_i K_a Jk \end{aligned}$$

Q7. Application numérique : mettre $G(p)$ sous la forme $\dfrac{K_G \cdot N(p)}{D(p)}$ avec $N(p)$ un polynôme du premier ordre et $D(p)$ un polynôme du second ordre, les deux polynômes seront mis sous forme canonique.

AN : $G(p) = \dfrac{10000 \cdot (2000 + p)}{p^2 + 2200 \cdot p + 400000 + 20000000 \cdot k}$

Compte tenu de la valeur proposée pour $T_i = 2\,\text{ms}$, le correcteur s'écrit :

$$C_i(p) = k_i \frac{T_i \cdot p + 1}{T_i \cdot p} = k_i \frac{2 \times 10^{-3} \cdot p + 1}{2 \times 10^{-3} \cdot p}$$
$$C_i(p) = k_i \frac{p + 500}{p}$$

Le produit $M_1(p) \cdot C_i(p)$ se simplifie donc en

$$M_1(p) \cdot C_i(p) = \frac{500 \cdot p}{(p + 500) \cdot (p + 200)} k_i \frac{p + 500}{p}$$
$$M_1(p) \cdot C_i(p) = \frac{500}{(p + 200)} k_i$$

Remarque : Il est préférable pour simplifier cette fonction de transfert de repartir de la FTBO avec les valeurs numériques puis de recalculer la FTBF.

Q8. Déterminer la valeur du paramètre k permettant d'assurer, pour $G(p)$, un coefficient d'amortissement $z = 0,5$. Déduire dans ce cas la pulsation propre ω_o du système du second ordre et son gain statique K_G.

Forme canonique :

$$G(p) = \frac{\frac{1}{40 + 2000 \cdot k}(2000 + p)}{\frac{p^2}{400000 + 20000000 \cdot k} + \frac{22}{4000 + 200000 \cdot k} \cdot p + 1}$$

Par identification

$\omega_0 = \sqrt{400000 + 20000000 \cdot k}$

$2\dfrac{z}{\omega_0} = \dfrac{22}{4000 + 200000 \cdot k}$

Pour avoir $z = 0,5$ il faut $k = 0{,}222$ d'où finalement $\omega_0 = 2\,200\,\text{rad/s}$.

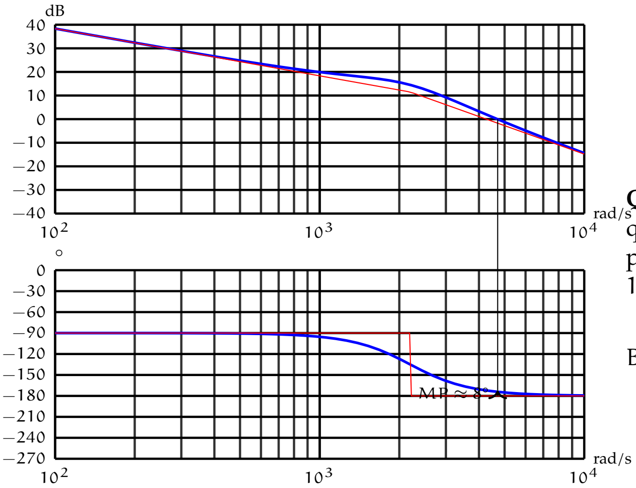
Q9. Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p) = \dfrac{M(p)}{\varepsilon(p)}$.

Boucle ouverte

$$\begin{aligned} BO(p) &= C_v(p) \cdot G(p) \cdot M_2(p) \cdot K_t \\ &= K_v \cdot 10000 \frac{2000 + p}{p^2 + 2200 \cdot p + 4840000 \cdot} \frac{K_c}{J \cdot p} \\ &= \frac{20000000 \cdot (2000 + p) \cdot K_v}{(p^2 + 2200 \cdot p + 4840000) \cdot p} \end{aligned}$$

Q10. Tracer l'allure des diagrammes de Bode (asymptotes et courbe) de la FTBO avec $K_v = 1$. Préciser la marge de gain et la marge de phase.

On mesure la marge de phase $MP \approx 8°$ sur le diagramme de phase, la marge de gain est infinie (le lieu de phase ne coupe jamais l'argument $-180°$). Le système est fortement oscillant.



Q11. Déterminer graphiquement, pour quelles valeurs de K_v le système est stable.

Le système est stable pour toutes les valeurs de K_v positives.

Q12. Calculer l'erreur indicielle.

Le système est de classe $\alpha = 1$ et est stable, l'erreur indicielle est donc nulle : $\epsilon_i = 0$.

Q13. Calculer l'erreur de vitesse (erreur permanente pour une entrée en rampe) dans ce système asservi. Déduire ainsi la valeur de K_v permettant de limiter cette erreur à 1 %.

Erreur de traînage.

$$\begin{aligned}\varepsilon_v &= \lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot\epsilon(p))\\ &= \lim_{p\to 0}(p\cdot(Cons(p) - K_v\Omega(p))\\ &= \lim_{p\to 0}(p\cdot\frac{1}{1+BO(p)}Cons(p))\end{aligned}$$

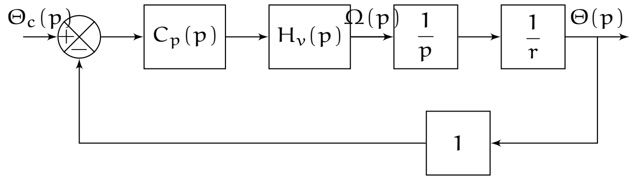
avec ici : $Cons(p) = \dfrac{a}{2\cdot p^2}$

$$= \lim_{p\to 0}\left(\frac{5\cdot 10^{-5}\cdot p^2(4840000)}{K_v\cdot 1000(2000)}\frac{a}{2\cdot p^2}\right) = \frac{121\cdot a}{1000000\cdot K_v}$$

Pour limiter l'erreur de traînage relative $\dfrac{\varepsilon_v}{a}$ à 1%, il faut $K_v = 0{,}0242$.

Remarque : Cette valeur de K_v va améliorer le comportement dynamique en augmentant la marge de phase (diminution des oscillations).

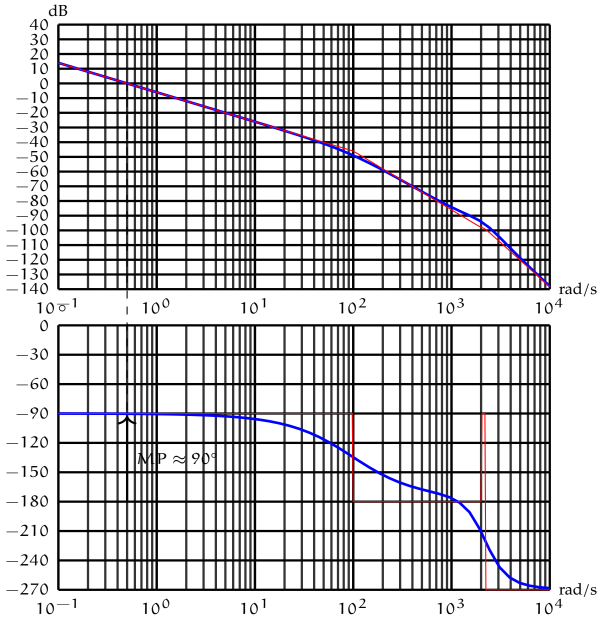
Q14. Compléter le schéma bloc du système asservi en position avec un correcteur série notée $C_p(p)$. La sortie du correcteur doit fournir la consigne pour la boucle de vitesse.



Q15. Pour $C_p(p) = 1$, donner l'allure de la réponse en fréquence asymptotes et courbe) du processus (FTBO) dans le plan de Bode (on tracera le diagramme entre 0,01 rad/s et 10 000 rad/s).

La FTBO de l'asservissement de position s'écrit : $BO_p(p) = C_p(p)\cdot H_v(p)\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{r}$ soit

$$BO_p(p) = 121000\cdot\frac{(2000+p)}{(p+100)/(p^2+2100\cdot p+4840000)\cdot p}$$



Q16. À partir de ce dernier diagramme, que peut-on conclure sur la stabilité du système non corrigé ?

Le système est stable, la marge de phase est d'environ $MP \approx 90°$, la pulsation $\omega_{0dB} = 0{,}5\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ est relativement basse.

Q17. Proposer un correcteur permettant si nécessaire d'améliorer la stabilité.

Le système est stable et précis vis-à-vis d'une entrée en échelon, on peut ici, proposer un correcteur qui améliore le temps de réponse en augmentant la bande passante en réglant par exemple la marge phase à $MP = 50°$. Un simple correcteur proportionnel suffit.