

## 2.6 Torseur cinétique

### 2.6.1 Définition

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R.

$$\{C_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

- $\vec{V}_{P/R}$  : Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R ;
- $\vec{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm$  : Résultante cinétique ou quantité de mouvement de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R ;
- $\vec{\sigma}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm$  : Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

#### a) Résultante cinétique

Soit O un point lié au référentiel  $\mathcal{R}$ , et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel E, par définition du centre d'inertie :  $m_E \vec{OG} = \int_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm$ .

En dérivant par rapport au temps dans R :  $m_E \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R = \left[ \frac{d}{dt} \int_{P \in E} \vec{OP} \cdot dm \right]_R$ .

Compte tenu du principe de conservation de la masse, on peut permuter la dérivation par rapport au temps et l'intégration sur la masse :

$$m_E \cdot \left[ \frac{d}{dt} \vec{OG} \right]_R = \int_{P \in E} \left[ \frac{d}{dt} \vec{OP} \right]_R \cdot dm.$$

On reconnaît la vitesse du point G et celle du point P par rapport au repère R. La quantité de mouvement se calcule donc finalement comme :

$$\vec{p}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm = m_E \cdot \vec{V}_{G/R}$$

#### b) Changement de point

$$\vec{\sigma}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm$$

$$\vec{\sigma}_{B,E/R} = \int_{P \in E} \vec{BP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm = \int_{P \in E} (\vec{BA} + \vec{AP}) \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm$$

$$\vec{\sigma}_{B,E/R} = \int_{P \in E} \vec{BA} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm$$

$$\vec{\sigma}_{B,E/R} = \vec{BA} \wedge \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm + \vec{\sigma}_{A,E/R}$$

On reconnaît la relation de changement de point d'un torseur, le champ des moments cinétiques  $\vec{\sigma}_{A,E/R}$  est équiprojectif.

On peut donc écrire :

$$\vec{\sigma}_{B,E/R} = \vec{\sigma}_{A,E/R} + \vec{BA} \wedge \vec{p}_{E/R}$$

ou

$$\vec{\sigma}_{B,E/R} = \vec{\sigma}_{A,E/R} + \vec{BA} \wedge m_E \cdot \vec{V}_{G/R}.$$

### 2.6.2 Cas du solide indéformable

Soit S, un solide indéformable de masse  $m_s$ .

L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide, la relation de composition des vitesses permet d'écrire :

$$\vec{V}_{P \in S/R} = \vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}$$

avec  $\vec{\Omega}_{S/R}$  : le vecteur rotation du solide S par rapport au repère R.

Pour un solide S le torseur cinétique s'écrit :

$$\{C_{S/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}_{S/R} = \int_{P \in S} \vec{V}_{P \in S/R} \cdot dm \\ \vec{\sigma}_{A,S/R} = \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P \in S/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

et la résultante cinétique :

$$\vec{p}_{S/R} = \int_{P \in S} \vec{V}_{P/R} \cdot dm = m_s \cdot \vec{V}_{G \in S/R}.$$

En faisant intervenir le point A dans la détermination du moment cinétique d'un solide indéformable, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A,S/R} &= \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{P \in S/R} \cdot dm \\ &= \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm \\ &= \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge \vec{V}_{A \in S/R} \cdot dm + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm \\ &= \left( \int_{P \in S} \vec{AP} \cdot dm \right) \wedge \vec{V}_{A \in S/R} + \int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm \end{aligned}$$

On reconnaît :

— dans le premier terme la définition du centre d'inertie G :

$$\int_{P \in S} \vec{AP} \cdot dm = m_s \vec{AG};$$

— dans le deuxième terme l'opérateur d'inertie du solide S au point A appliqué au vecteur :

$$\int_{P \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot dm = \overline{\mathcal{I}}_A(S) \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Finalement, le moment cinétique d'un solide indéformable dans son mouvement par rapport à un repère R devient

$$\vec{\sigma}_{A,S/R} = m_s \vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in S/R} + \overline{\mathcal{I}}_A(S) \cdot \vec{\Omega}_{S/R}.$$

Cette relation est importante mais on s'attachera à l'utiliser dans les cas particuliers suivants qui facilitent les calculs.

Le point A est confondu avec le centre d'inertie G

$$\vec{\sigma}_{G,S/R} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

A est un point fixe dans le repère R

$$\vec{\sigma}_{A,S/R} = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Le mouvement du solide S par rapport au repère R est une translation

$$\vec{\sigma}_{A,S/R} = m_S \vec{A}G \wedge \vec{V}_{A \in S/R}$$

Il est souvent préférable de calculer le moment cinétique soit au centre d'inertie, soit en un point A du solide S fixe dans le repère R puis d'utiliser la relation de changement de point si nécessaire pour le ramener au point d'étude.

## 2.7 Torseur dynamique

### 2.7.1 Définition

Le torseur dynamique est le torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au repère R :

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\ \vec{\delta}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

—  $\vec{\Gamma}_{P/R}$  : accélération du point P de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R ;

—  $\vec{A}_{E/R} = \int_{P \in E} \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm$  : résultante dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R, on montre aussi que

$$\vec{A}_{E/R} = m_E \cdot \vec{\Gamma}_{G/R};$$

—  $\vec{\delta}_{A,E/R} = \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm$  : moment dynamique en A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à R.

### 2.7.2 Changement de point de réduction

Le champ des moments dynamiques est un champ de torseur. Pour changer de point de réduction on utilise donc la relation générale des torseurs :

$$\vec{\delta}_{B,E/R} = \vec{\delta}_{A,E/R} + \vec{B}A \wedge m_E \cdot \vec{\Gamma}_{G/S}.$$

### 2.7.3 Relation entre la résultante cinétique et la résultante dynamique

On montre facilement que :

$$\vec{A}_{E/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{p}_{S/R} \right]_R = m_E \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}_{G/R} \right]_R = m_E \vec{\Gamma}_{G/R}.$$

### 2.7.4 Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

Par définition le moment cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{A,E/R} &= \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,E/R} \right]_R &= \left[ \frac{d}{dt} \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \right]_R \\ &= \int_{P \in E} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{A}P \wedge \vec{V}_{P/R}) \right]_R \cdot dm \\ &= \int_{P \in E} \left[ \frac{d}{dt} \vec{A}P \right]_R \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \left[ \frac{d}{dt} \vec{V}_{P/R} \right]_R \cdot dm \\ &= \int_{P \in E} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{O}P - \vec{O}A) \right]_R \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\ &= \int_{P \in E} (\vec{V}_{P/R} - \vec{V}_{A/R}) \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm + \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm \\ \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,E/R} \right]_R &= \int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm - \int_{P \in E} \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm \end{aligned}$$

— le premier terme représente le moment dynamique en A

$$\int_{P \in E} \vec{A}P \wedge \vec{\Gamma}_{P/R} \cdot dm = \vec{\delta}_{A,E/R};$$

— le second devient

$$\int_{P \in E} \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{P/R} \cdot dm = \vec{V}_{A/R} \wedge \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R} \cdot dm = m_E \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}.$$

D'où la relation cherchée entre le moment dynamique et le moment cinétique :

$$\vec{\delta}_{A,E/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,E/R} \right]_R + m_E \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G/R}$$

A un point géométrique quelconque et G le centre d'inertie de cet ensemble matériel.

#### a) Cas particuliers

— A est confondu avec G, alors :  $\vec{\delta}_{G,E/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,E/R} \right]_R$  ;

— A est un point fixe de R, alors :  $\vec{\delta}_{A,E/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,E/R} \right]_R$ .

## b) Détermination du moment dynamique

Il est en général plus facile de déterminer le moment cinétique que le moment dynamique (le champ des vitesses est en général connu). Pour calculer le moment dynamique, on choisit de calculer en un point caractéristique (le centre d'inertie G ou un point fixe du repère) le moment cinétique puis de le dériver. Pour obtenir le moment dynamique en un autre point on utilise la relation liant les moments d'un torseur.

## 2.7.5 Cas du solide indéformable

Pour un solide, nous avons la relation de composition des vitesses des points du solide :

$$\vec{V}_{P \in S/R} = \vec{V}_{Q \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{QP}.$$

La résultante dynamique s'écrit :

$$\vec{A}_{S/R} = m_S \vec{\Gamma}_{G \in S/R}$$

et le moment dynamique en A :

$$\vec{\delta}_{A,S/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,S/R} \right]_R + m_S \cdot \vec{V}_{A/R} \wedge \vec{V}_{G \in S/R}$$

avec A point géométrique.

Cette dernière relation est à manipuler avec précaution, en effet  $\vec{V}_{A/R}$  n'est pas toujours facile à évaluer pour un point quelconque, on se limitera donc à calculer le moment dynamique uniquement en des points avec des propriétés particulières :

— A est confondu avec G, alors :

$$\vec{\delta}_{G,S/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G,S/R} \right]_R ;$$

— A est un point fixe de R, alors :

$$\vec{\delta}_{A,S/R} = \left[ \frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A,S/R} \right]_R.$$

Puis on utilisera la relation de changement de point des torseurs.

## 2.8 Énergie cinétique

## 2.8.1 Définition

L'énergie cinétique élémentaire d'un point P affecté de la masse  $dm$  dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$dT_{P/R} = \frac{1}{2} \vec{V}_{P/R}^2 dm$$

L'énergie cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère R est alors :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \int_{P \in E} \vec{V}_{P/R}^2 dm$$

L'unité de l'énergie cinétique est le joule.

## 2.8.2 Cas du solide indéformable

Soit un solide S de masse  $m$ , de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère R, A un point lié au solide.

Pour un solide, l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport au repère R s'écrit :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \int_{P \in S} \vec{V}_{P \in S/R}^2 dm.$$

On a  $\vec{V}_{P \in S/R} = \vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}$ , d'où

$$\begin{aligned} T_{S/R} &= \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{V}_{A \in S/R} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{P \in S} \vec{V}_{A \in S/R}^2 dm + 2 \cdot \int_{P \in S} \vec{V}_{A \in S/R} \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) dm + \int_{P \in S} (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})^2 dm \right) \end{aligned}$$

$\vec{V}_{A \in S/R}$  et  $\vec{\Omega}_{S/R}$  indépendants de la variable d'intégration  $dm$

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \vec{V}_{A \in S/R}^2 + \vec{V}_{A \in S/R} \cdot \left( \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \int_{P \in S} \vec{AP} dm \right) + \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) \cdot (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP}) dm$$

On reconnaît le produit mixte  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$  invariant par permutation circulaire dans le troisième terme avec  $\vec{u} = \vec{\Omega}_{S/R}$ ,  $\vec{v} = \vec{AP}$  et  $\vec{w} = (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})$  soit alors :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \vec{V}_{A \in S/R}^2 + m_S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in S/R}) + \frac{1}{2} \int_{P \in S} (\vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})) \cdot \vec{\Omega}_{S/R} dm$$

On reconnaît l'opérateur d'inertie du solide S en A

$$\int_{P \in S} (\vec{AP} \wedge (\vec{\Omega}_{S/R} \wedge \vec{AP})) dm = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}.$$

Finalement la relation permettant de déterminer l'énergie cinétique d'un solide :

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \vec{V}_{A \in S/R}^2 + m_S \cdot \vec{\Omega}_{S/R} \cdot (\vec{AG} \wedge \vec{V}_{A \in S/R}) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}_{S/R} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{\Omega}_{S/R}$$

Cette relation est assez difficile à utiliser, montrons que dans le cas d'un solide, l'énergie cinétique peut aussi se calculer en réalisant le comoment des torseurs cinématique et cinétique.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{V}_{S/R} \} \otimes \{ \mathcal{C}_{S/R} \}$$

On note :

— Torseur cinématique en A du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\{ \mathcal{V}_{S/R} \} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A \in S/R} \end{array} \right\}_A.$$

— Torseur cinétique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R

$$\{ \mathcal{C}_{S/R} \} = \left\{ \begin{array}{c} m_S \cdot \vec{V}_{G \in S/R} \\ \vec{\sigma}_{A,S/R} \end{array} \right\}_A.$$

$$\begin{aligned}
 T_{S/R} &= \frac{1}{2} \{V_{S/R}\} \otimes \{C_{S/R}\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{S/R}}{V_{AeS/R}} \right\}_A \otimes \left\{ \frac{m_S \cdot \overrightarrow{V}_{GeS/R}}{\overrightarrow{\sigma}_{A,S/R}} \right\}_A \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{A,S/R} + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V}_{AeS/R} \cdot \overrightarrow{V}_{GeS/R} \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \left( m_S \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{AeS/R} + \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \right) + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V}_{AeS/R} \cdot \overrightarrow{V}_{GeS/R} \\
 &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \left( m_S \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{AeS/R} + \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \right) + \frac{1}{2} m_S \cdot \overrightarrow{V}_{AeS/R} \cdot \left( \overrightarrow{V}_{AeS/R} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{GA} \right) \\
 T_{S/R} &= \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V}_{AeS/R}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \left( \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}_{AeS/R} \right) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overline{\overline{I}}_A(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat. Cette relation est souvent plus facile à mettre en œuvre que la relation générale.

L'énergie cinétique ne dépend donc pas du point de calcul (propriété du comoment), il est donc préférable d'appliquer cette relation en des points particuliers :

**En G, centre d'inertie du solide**

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V}_{GeS/R}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overline{\overline{I}}_G(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

avec  $\overline{\overline{I}}_G(S)$  la matrice d'inertie du solide S en G.

**Pour un mouvement de rotation de centre C point fixe dans le mouvement de rotation (rotule ou gyroscope) par rapport au repère R**

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overline{\overline{I}}_C(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

avec  $\overline{\overline{I}}_C(S)$  la matrice d'inertie du solide S en C.

**Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (C,  $\vec{u}$ )**, en C point fixe de l'axe de rotation du solide S par rapport au repère R.

On pose  $\overline{\overline{I}}_C(S) = \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})}$  la matrice d'inertie du solide S en C dans la base  $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \omega_u \cdot \vec{u}$ .

$$\begin{aligned}
 T_{S/R} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \cdot \overline{\overline{I}}_C(S) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \\
 &= \frac{1}{2} (\omega_u, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} I_u & -F & -E \\ -F & I_v & -D \\ -E & -D & I_w \end{pmatrix}_{C(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})} \cdot \begin{pmatrix} \omega_u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

d'où

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega_u^2$$

**Pour un mouvement de translation**

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V}_{AeS/R}^2 = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V}_{GeS/R}^2$$

## 2.9 Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solides

Soit E un ensemble de n solides  $S_i$ , en mouvement par rapport au repère R.

### 2.9.1 Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Le torseur cinétique d'un ensemble de solides, est la somme (en un même point) des torseurs cinétiques de chaque solide.

$$\{C_{E/R}\} = \sum_{i=1}^n \{C_{S_i/R}\}$$

La résultante cinétique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes cinétiques et le moment cinétique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments cinétiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{p}_{E/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{p}_{S_i/R} \qquad \overrightarrow{\sigma}_{A,E/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\sigma}_{A,S_i/R}$$

### 2.9.2 Torseur dynamique d'un ensemble de solides

Le torseur dynamique d'un ensemble de solides, est la somme (en un même point) des torseurs dynamiques de chaque solide.

$$\{D_{E/R}\} = \sum_{i=1}^n \{D_{S_i/R}\}$$

La résultante dynamique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes dynamiques et le moment dynamique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments dynamiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{A}_{E/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A}_{S_i/R} \qquad \overrightarrow{\delta}_{A,E/R} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{\delta}_{A,S_i/R}$$

### 2.9.3 Énergie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides est la somme des énergies cinétiques.

$$T_{E/R} = \sum_{i=1}^n T_{S_i/R}$$

En décomposant sur chaque solide :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathcal{V}_{S_i/R} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{C}_{S_i/R} \right\}$$

$$T_{E/R} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{S_i/R}}{\mathcal{V}_{A_i \in S_i/R}} \right\}_{A_i} \otimes \left\{ \frac{m_i \vec{V}_{G_i \in S_i/R}}{\sigma_{A_i, S_i/R}} \right\}_{A_i}$$

**Remarque :** L'énergie cinétique ne dépendant pas du point de calcul du comoment, chaque comoment peut être calculé en un point particulier caractéristique du mouvement considéré.

## 2.10 Feuille de travaux dirigés n°2b

### Exercice 6 - Cinétique d'un train épicycloïdal adapté du concours ICNA 2011

Corrigé page 44

#### A. Réducteur MULTIPLEX

La figure 2.18a montre le réducteur épicycloïdal Multiplex observé axialement et la figure 2.18b présente le schéma cinématique de ce réducteur, dont un seul satellite est modélisé.

Le planétaire  $P_1$  est lié à l'arbre moteur ; le porte-satellites  $P_5$  est lié à l'arbre de sortie ; le planétaire  $P_2$  est lié au corps considéré fixe dans le repère galiléen.

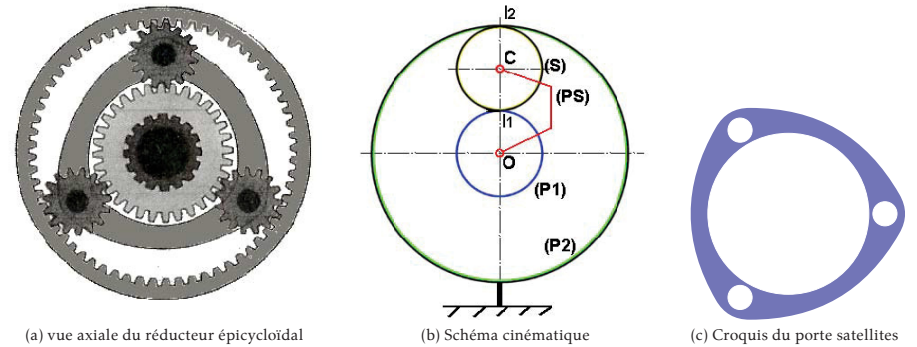


FIGURE 2.18 – réducteur épicycloïdal MULTIPLEX

Le tableau ci-dessous récapitule les caractéristiques des composants.

	Rotor Moteur ( $P_1$ )	Satellite (S)	Planétaire ( $P_2$ )	Porte satellites : ( $P_5$ )
Moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation ( $\text{kgm}^2$ )	$I_{P_1} = 1 \times 10^{-6}$	$I_S = 7 \times 10^{-8}$ (au point C)	fixe	$I_{P_5} = 10 \times 10^{-6}$
Masse (kg)		$M_S = 4 \times 10^{-3}$		
Nombre de dents	$Z_{P_1} = 19$	$Z_S = 12$	$Z_{P_2} = 43$	
Vitesse de rotation	$\omega_{P_1/P_2} = \omega_{P_1}$	voir le questionnaire	$\omega_{P_2} = 0$	$\omega_{P_5/P_2} = \omega_{P_5}$

On pourra utiliser les désignations suivantes pour les démarches de calcul, mais pas dans l'expression finale des résultats :  $R_{P_1}$  le rayon primitif de la roue ( $P_1$ ),  $R_{P_2}$  le rayon primitif de la roue ( $P_2$ ),  $R_S$  le rayon primitif du satellite.

On rappelle que les nombres de dents  $Z$  des pignons sont en relation avec leurs rayons primitifs  $R$  respectifs par la relation :  $2 \cdot R = m \cdot Z$ ;  $m$  étant le module de la denture :  $m = 0,45 \text{ mm}$ .

Pour alléger les notations, les vitesses de rotation  $\omega_{P_1/P_2}$  et  $\omega_{P_5/P_2}$  sont notées respectivement  $\omega_{P_1}$  et  $\omega_{P_5}$ .

On s'intéresse tout d'abord à un satellite et à son mouvement

**Q1.** Écrire la relation de roulement sans glissement en  $I_2$  et montrer que l'expression de la vitesse de rotation du satellite par rapport à  $P_2$   $\omega_{S/P_2}$  en fonction de  $\omega_{P_5}$  et des nombres de dents s'écrit :

$$\omega_{S/P_2} = -\frac{Z_S + Z_{P_1}}{Z_S} \cdot \omega_{P_5}$$

Q2. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(S/P2)$ , du satellite S, dans son mouvement par rapport à  $P_2$ , en fonction de  $\omega_{PS}$ , des nombres de dents, et des autres données utiles du problème.

Q3. Donner la forme de la matrice du porte satellite.

On s'intéresse maintenant à la loi d'entrée-sortie du train épicycloïdal.

Q4. Exprimer le rapport de transmission  $K_2 = \frac{\omega_{sortie}}{\omega_{entre}} = \frac{\omega_{PS}}{\omega_{P1}}$  en fonction des nombres de dents  $Z_{P1}$  et  $Z_{P2}$ .

Nota : la démarche pourra être conduite en combinant les relations de roulement sans glissement en  $I_1$  et  $I_2$ , ou bien en écrivant la relation de Willis.

On nomme  $\Sigma$  l'ensemble constitué des solides suivants : { le rotor moteur, les trois satellites, le porte satellite PS avec l'hélice }.

Q5a. Donner l'expression de l'énergie cinétique  $E_c(\Sigma/P2)$ ;

Q5b. en déduire l'expression littérale  $I_{equ2}$  de l'inertie équivalente de  $\Sigma$  en fonction de  $\omega_{P1}$ , de  $K_2$  et des nombres de dents, des moments d'inertie  $I_{P1}, I_S, I_{PS}$ , et des autres données utiles du problème.

**Exercice 7 - Cinétique Drone - Mines 2010**

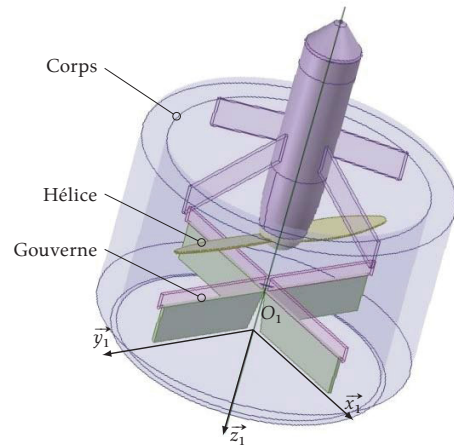
Extrait de Mines MP 2001

Corrigé page 44

Le sujet étudie un drone miniature à voilure tournante (figure 2.19a).



(a) Drone à voilure tournante



(b) Modélisation du drone

FIGURE 2.19 – Drone

Lors de l'étude du mouvement nous avons besoin de déterminer les caractéristiques cinétiques de plusieurs solides.

On s'intéresse plus particulièrement aux éléments représentés ci-dessous

**A. Schéma, données, notation et paramétrage du drone**

Pour les calculs de pré-dimensionnement, le drone, dont le centre d'inertie est noté G, est constitué de deux solides (1) et (2) :

Le corps (1) (figure 2.19b), constitué du corps et des gouvernes (1a), (1b), (1c) et (1d). On négligera la masse et l'inertie des gouvernes devant les masses et inerties des autres composants du drone Le corps du drone est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe  $(G_1, \vec{z}_1)$  et de masse  $m_1 = 0,89$  kg

. Le point  $G_1$  est son centre d'inertie. On note  $\overline{\overline{I}}_{G_1}(1)$  la matrice d'inertie du solide (1) calculée en  $G_1$ .

$$\overline{\overline{I}}_{G_1}(1) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{G_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1G_1} = \ell_1 \cdot \vec{z}_1$$

L'axe hélice (2), constitué de l'arbre moteur et de l'hélice. Cet ensemble (2) est en liaison pivot d'axe par rapport au corps (1).

L'axe hélice (2) est considéré comme étant de symétrie axiale d'axe  $(G_2, \vec{z}_1)$  et de masse  $m_2 = 0,11$  kg

. Le point  $G_2$  est son centre d'inertie. On note  $\overline{\overline{I}}_{G_2}(2)$  la matrice d'inertie du solide (2) calculée en  $G_2$ .

$$\overline{\overline{I}}_{G_2}(2) = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{G_2(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{O_1G_2} = \ell_2 \cdot \vec{z}_1$$

**B. Question**

Q1. En tenant compte des symétries, simplifier les matrices d'inertie  $\overline{\overline{I}}_{G_1}(1)$  et  $\overline{\overline{I}}_{G_2}(2)$  des solides (1) et (2)

Q2. On pose  $\overrightarrow{O_1G} = l_G \cdot \vec{z}_1$ , déterminer  $l_G$  caractérisant la position du centre d'inertie G du drone en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

Q3. En déduire les matrices d'inertie des solides (1) et (2) calculées en G en fonction des caractéristiques cinétiques des solides (1) et (2).

**Exercice 8 - Antenne de liaison par satellite - Étude de l'axe d'azimut**

Adapté à partir du concours MT98

Corrigé page 45

**A. Description**

**Fonction globale**

Le système étudié est une station de radiocommunication qui a pour fonction principale d'assurer des liaisons bidirectionnelles entre le réseau terrestre de communication et un satellite géostationnaire pour transférer des données de l'un à l'autre.

Les moyens mis en œuvre pour constituer cette station se composent :

- d'une antenne de type « Cassegrain » à structure « Carrousel » équipée d'un source périscopique à quatre miroirs permettant d'orienter l'émetteur récepteur vers le satellite;
- d'équipements électroniques d'émission/réception permettant de générer et recevoir les données;
- d'équipements destinés à traiter et conditionner ces données.

Tous ces équipements électroniques ainsi que les armoires électriques de commande et de connexion au réseau sont abrités dans la structure maçonnée sur laquelle repose l'antenne. (Voir figure 2.20)

**B. Motorisation de la liaison « azimut »**

On s'intéresse dans cette étude à l'équilibrage et la motorisation de l'axe d'azimut dont le schéma cinématique est représenté sur la figure 2.21.

La liaison 1-0 est globalement considérée comme un pivot d'axe  $(O, \vec{k}_{01})$ .

L'étude est réalisée lorsque la liaison 2/1 est bloquée, l'axe du « bol » est horizontal position dite « horizon » (voir figure 2.21).

Q1. Exprimer dans ces conditions, par leurs éléments de réduction en un point, les torseurs cinématiques des mouvements de 1 par rapport à 0, et de 2 par rapport à 0 :  $\{V_{1/0}\}, \{V_{2/0}\}$ .

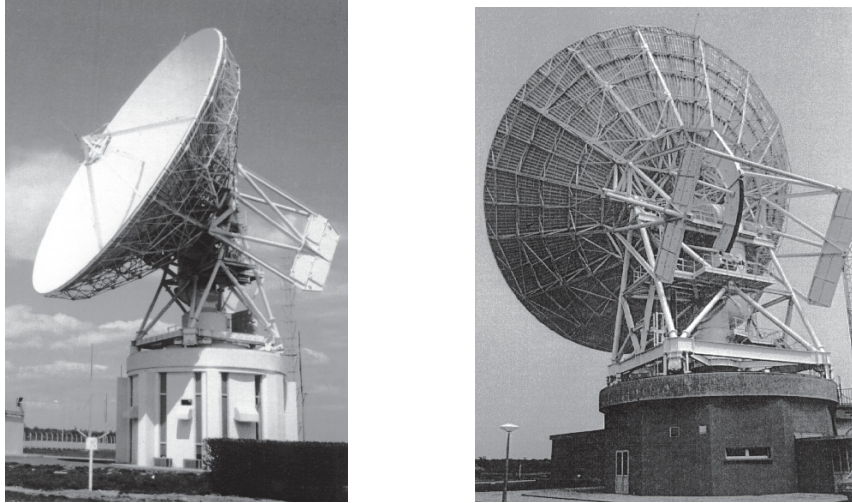


FIGURE 2.20 – Antenne

Le solide 1, de masse  $M_1$ , a pour centre de gravité le point  $G_1$  situé sur  $(O, \vec{k}_{01})$ , et a pour matrice

$$\text{d'inertie en A, dans la base } B_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_{01}) : \overline{\overline{\mathcal{I}_A(1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Le solide 1 possède deux plans de symétrie matérielle :  $(A, \vec{i}_1, \vec{k}_{01})$  et  $(A, \vec{j}_1, \vec{k}_{01})$ .

Q2. En déduire la forme la plus simple de sa matrice d'inertie  $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(1)}}$ .

Le solide 2, de masse  $M_2$ , a pour centre de gravité le point  $G_2$  tel que  $\vec{AG}_2 = -a \cdot \vec{k}_2$ , et a pour matrice

$$\text{d'inertie en A, dans la base } B_2(\vec{i}_2, \vec{j}_{12}, \vec{k}_2) : \overline{\overline{\mathcal{I}_A(2)}} = \begin{pmatrix} A_2 & -F_2 & -E_2 \\ -F_2 & B_2 & -D_2 \\ -E_2 & -D_2 & C_2 \end{pmatrix}_{B_2}$$

Le solide 2 possède un plan de symétrie matérielle :  $(A, \vec{i}_2, \vec{k}_2)$ .

Q3. En déduire la forme la plus simple de sa matrice d'inertie  $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(2)}}$ .

Le constructeur du système a ajouté au solide 2 deux masses identiques  $M$  dont les positions des centres de gravité  $G_{M1}$  et  $G_{M2}$  sont définies par :  $\vec{AG}_{M1} = -L \cdot \vec{k}_2 + b \cdot \vec{j}_{12} + c \cdot \vec{i}_2$  et  $\vec{AG}_{M2} = -L \cdot \vec{k}_2 - b \cdot \vec{j}_{12} + c \cdot \vec{i}_2$

L'addition des deux masses  $M$  au solide 2 permet de placer le centre de gravité de l'ensemble  $\{2M+2\}$  au point  $G_{2M}$  tel que  $\vec{AG}_{2M} = -e \cdot \vec{k}_2$ . Cette position facilite la mise en position dite « de survie » (axe  $(A, \vec{k}_2)$  vertical) en cas de risque (tempête par exemple).

Q4. Déterminer alors l'expression de  $L$  en fonction de  $a, e, M$  et  $M_2$ .

La matrice d'inertie de chaque solide additionnel de masse  $M$ , s'écrit en son centre de gravité  $G_{M1}$  ou  $G_{M2}$  dans la base  $B_2(\vec{i}_2, \vec{j}_{12}, \vec{k}_2)$  :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{Mi}}(M)}} = \begin{pmatrix} A_M & 0 & -E_M \\ 0 & B_M & 0 \\ -E_M & 0 & C_M \end{pmatrix}_{B_2}$$

Q5. En déduire la forme de la matrice d'inertie  $\overline{\overline{\mathcal{I}_{G_{2M}}(2M)}}$  des deux masses additionnelles au point A

dans la base  $B_2(\vec{i}_2, \vec{j}_{12}, \vec{k}_2)$ .

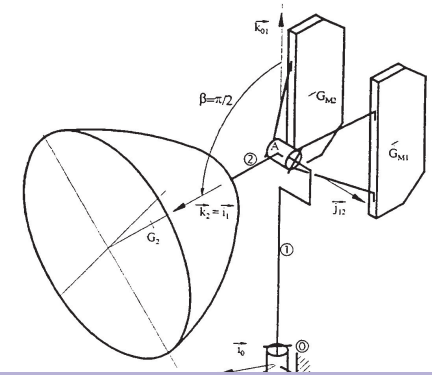
L'addition des deux masses  $M$  au solide 2 permet également de rendre diagonale la matrice d'inertie de l'ensemble  $\{2M+2\}$ .

Q6. En déduire l'expression de  $c$  en fonction de  $E_M, E_2, M$  et  $L$ .

Q7. Exprimer dans la base  $B_1$ , par ses éléments de réduction en A le torseur cinétique du solide 1 dans son mouvement par rapport à 0 :  $\{C_{1/0}\}$ .

Q8. Exprimer dans la base  $B_1$ , par ses éléments de réduction en A le torseur cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport à 0 :  $\{C_{2/0}\}$ .

Q9. Exprimer dans la base  $B_1$ , par ses éléments de réduction en A le torseur dynamique du système  $\Sigma = \{1, C2\}$  dans son mouvement par rapport à 0 :  $\{D_{\Sigma/0}\}$



**Exercice 9 - Modèle de robot**

Adapté du concours ENSEA

Corrigé page 46

On cherche à caractériser les mouvements du système robotisé présenté avec son paramétrage sur la figure 2.22.

La liaison entre la pièce 1 et le bâti 0 est une liaison hélicoïdale d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  dont le pas est noté  $p$  et les paramètres de translation et de rotation sont notés  $y = O_1O_2 \cdot \vec{z}_0$  et  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .

La liaison entre 1 et 2 est une pivot d'axe  $(O_2, \vec{x}_1) = (O_2, \vec{x}_2)$  paramétrée par l'angle  $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

La liaison entre 2 et 3 est une pivot d'axe  $(O_3, \vec{y}_2) = (O_3, \vec{y}_3)$  paramétrée par l'angle  $\theta = (\vec{x}_2, \vec{x}_3)$ .

On pose  $\vec{O}_2\vec{O}_3 = l_2 \cdot \vec{y}_2$  et  $\vec{O}_3\vec{O}_4 = l_3 \cdot \vec{x}_3$ .

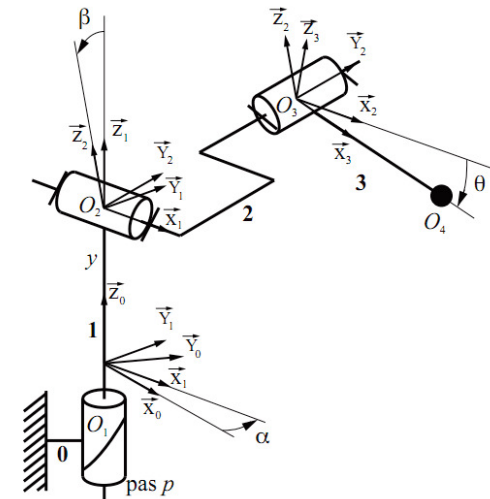


FIGURE 2.22 – Paramétrage du système robotisé

Pour toutes les questions suivantes, vous pouvez, soit

2.10 Feuille de travaux dirigés n°2b

- accepter la réponse proposée, et dans ce cas-là vous précisez les éléments qui permettent d'obtenir le résultat (hypothèses, théorèmes, ...) sans calculer;
- infirmer la réponse et dans ce cas-là, vous devez déterminer la bonne réponse.

Q1. Le mouvement du solide 3 par rapport au bâti 0 peut être représenté par le torseur cinématique suivant :

$$\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3 \\ \frac{p}{2 \cdot \pi} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{O_2}$$

La forme de l'ensemble 2 est schématisée sur la figure 2.23. La matrice d'inertie au point  $O_2$  de cet ensemble est notée :

$$\overline{\overline{I_{O_2}(2)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{O_2, \substack{(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)}}}$$

Le point  $O_2$  est situé à la distance  $a$  de la face gauche, à la distance  $\frac{d_2}{2}$  de la face avant et à la distance  $\frac{d_3}{2}$  de la face inférieure.

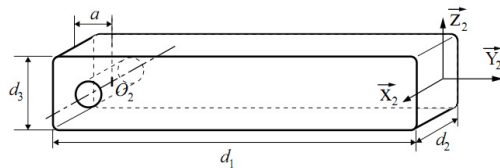


FIGURE 2.23 – Forme schématique de l'ensemble 2

Q2. La matrice d'inertie, exprimée en  $O_2$ , **en tenant compte du perçage**, est diagonale dans la base  $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

Dans la suite, **on néglige le perçage et la distance  $a$** . On suppose de plus que la distance  $d_1$  est très grande devant  $d_2$  et  $d_3$ .  $m$  désigne la masse de la pièce.

Q3. On peut alors en conclure que le terme  $A$  de la matrice d'inertie est très grand devant les termes  $B$  et  $C$ .

Q4. Le torseur cinétique de la pièce 2 dans son mouvement par rapport à 0 peut s'écrire au point  $O_2$ .

$$\{C_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} m \cdot \vec{z}_1 \\ A \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_2 + C \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{z}_2 \end{array} \right\}_{O_2}$$

Q5. L'énergie cinétique du solide 2 dans son mouvement par rapport à 0 s'écrit, quel que soit le point où on la calcule

$$T_{2/0} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot A \cdot \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin^2 \beta + \frac{1}{2} \cdot C \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2 \beta$$