Corrections

Cor. 1 : Étude d'un centre d'usinage 5 axes

Sujet page 1

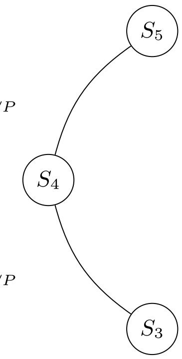
Q1. Tracer le graphe de structure du mécanisme, préciser les torseurs cinématiques des différentes liaisons sur ce graphe.

$$\{\mathcal{V}_{5/4}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_5\in 5/3}} = \dot{y}(t)\cdot\vec{y_3} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Glissière $\vec{z_3}$

$$\{\mathcal{V}_{4/3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_4\in 4/3}} = \dot{y}(t)\cdot\vec{y_3} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Glissière $\vec{y_3}$



Q2. Définir et caractériser le lieu géométrique du point O_5 à l'extrémité de l'outil, dans son mouvement par rapport au repère R_3, lorsque l'on commande les axes « Y » et « Z ».

Le point O_5 se déplace dans un plan normal à $\vec{x_3}$.

Q3. Exprimer $\overrightarrow{O_3O_5}$ dans la base du référentiel R_3.

$$\overrightarrow{O_3O_5} = \ell_4\cdot\vec{x_3} + y(t)\cdot\vec{y_3} + (\ell_3 + z(t))\cdot\vec{z_3}$$

Q4. Donner l'expression, dans la base du référentiel R_3, de la vitesse du point O_5 lié à S_5 , dans son mouvement par rapport à R_3 en fonction de $\dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t}$ et $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}\,z(t)}{\mathrm{d}t}$. Ce vecteur vitesse sera noté : $\overrightarrow{V_{O_5\in S5/R3}}$.

$$\overrightarrow{V_{O_5\in S5/R3}} = \dot{y}(t)\cdot\vec{y_3} + \dot{z}(t)\cdot\vec{z_3}$$

Q5. Calculer la valeur maximale de la norme du vecteur vitesse du point O_5, lié à S_5 dans son mouvement par rapport à R_3.

$$\|\overrightarrow{V_{O_5\in S5/R3}}\| = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 40\cdot\sqrt{2} \quad \mathrm{m\cdot min^{-1}}$$

Q6. Tracer le graphe de structure du mécanisme, préciser les torseurs cinématiques des différentes liaisons sur ce graphe.

$$\{\mathcal{V}_{0/1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/1}} = \dot{\theta}_0(t)\cdot\vec{z_1} \\ \overrightarrow{V_{O_1\in 0/1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O_1,\vec{z_1})}$$

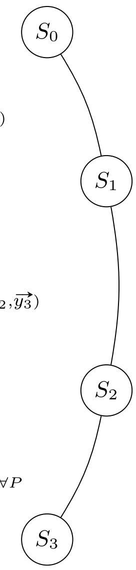
Pivot $(O_1, \vec{z_1})$

$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \dot{\theta}_1(t)\cdot\vec{y_3} \\ \overrightarrow{V_{O_2\in 1/2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O_2,\vec{y_3})}$$

Pivot $(O_2, \vec{y_3})$

$$\{\mathcal{V}_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_2\in 2/3}} = \dot{x}(t)\cdot\vec{x_3} \end{Bmatrix}_{\forall P}$$

Glissière $\vec{x_3}$



Q7. En analysant les mouvements, sans calculs, donner le nom de la liaison cinématiquement équivalente entre S_0 et S_2 ? Dessiner la représentation normalisée de cette liaison en précisant son centre et ses axes remarquables.

Entre S_0 et S_2 o trouve deux pivots perpendiculaires, la liaison équivalente est donc une liaison sphérique à doigt en O_1.

Q8. Écrire le torseur cinématique associé à la liaison équivalente L_{eq} entre S_0 et S_2 , exprimé en son centre et projeté dans la base du repère R_1 .

$$\begin{aligned}\{\mathcal{V}_{0/2}\} &= \{\mathcal{V}_{0/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/2}\} \\ &= \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/1}} = \dot{\theta}_0(t)\cdot\vec{z_1} \\ \overrightarrow{V_{O_1\in 0/1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1} \\ &+ \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = \dot{\theta}_1(t)\cdot\vec{y_3} \\ \overrightarrow{V_{O_1\in 1/2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_1}\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{V}_{0/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \\ \dot{\theta}_0 & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{O_1 \\ (\vec{x_1},\vec{y_3},\vec{z_1})}}$$

Q9. Définir et caractériser le lieu géométrique du point O_0, appartenant à S_0, dans son mouvement par rapport au repère R_3 , quand on ne commande que les rotations des axes « B » et « C »

Le point O_0 se déplace sur un cercle de rayon ℓ_0.

Q10. Exprimer $\overrightarrow{O_3O_0}$ dans la base du référentiel R_3.

$$\overrightarrow{O_3O_0} = x(t)\cdot\vec{x_3} + \ell_2\cdot\vec{z_3} - \ell_1\cdot\vec{y_3} + \ell_0\cdot\vec{z_1}$$

Q11. Donner l'expression, dans la base du référentiel R_3, de la vitesse du point O_0 lié à S_0, dans son mouvement par rapport à R_3 en fonction de ℓ_0, θ_1, $\dot{\theta}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\,\theta_1(t)}{\mathrm{d}t}$, $\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$. Ce vecteur vitesse sera noté : $\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}$

$$\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_3O_0}\right]_{R_3}$$
$$= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}x(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_2\cdot\overrightarrow{z_3}-\ell_1\cdot\overrightarrow{y_3}+\ell_0\cdot\overrightarrow{z_1}\right]_{R_3}$$
$$\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}} = \dot{x}(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_0\cdot\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{z_1}\right]_{R_3}$$
$$= \dot{x}(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_0\cdot\overrightarrow{\Omega_{0/3}}\wedge\overrightarrow{z_1}$$
$$\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}} = \dot{x}(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_0\cdot\left(\dot{\theta}_0\cdot\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_1\cdot\overrightarrow{y_3}\right)\wedge\overrightarrow{z_1}$$
$$\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}} = \dot{x}(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_0\cdot\dot{\theta}_1\cdot\overrightarrow{x_1}$$

Q12. Calculer la valeur maximale de la norme de ce vecteur vitesse si $\ell_0 = 0{,}1\,\mathrm{m}$.

$$\|\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}\| = \sqrt{\dot{x}^2+2\cdot\ell_0\cdot\dot{\theta}_1\dot{x}\cdot\overrightarrow{x_3}\cdot\overrightarrow{x_1}+\ell_0^2\cdot\dot{\theta}_1^2}$$
$$\|\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}\| = \sqrt{\dot{x}^2+2\cdot\ell_0\cdot\dot{\theta}_1\dot{x}\cdot\cos\theta_1+\ell_0^2\cdot\dot{\theta}_1^2}$$

Pour $\dot{\theta}_1 > 0$ alors, la vitesse est maximale pour $\theta_1 = 0(2\cdot\pi)$ soit

$$\|\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}\| = 2{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Q13. Définir et caractériser le lieu géométrique du point O_5, extrémité de l'outil, par rapport à R_2, lorsque l'on commande les axes « X », « Y » et « Z ». Illustrer par une représentation schématique.

Dans le référentiel, R_2, le lieu du point O_5 est un volume parallélépipédique de dimensions $800\times600\times500\,\mathrm{mm}$.

Q14. Exprimer le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_{S_0/R_3}}$ dans la base du référentiel R_1 en fonction de $\dot{\theta}_0$ et $\dot{\theta}_1$. Donner la relation entre les vecteurs vitesses $\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}}$, $\overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S_0/R_3}}$.

$$\overrightarrow{\Omega_{S_0/R_3}} = \dot{\theta}_0\cdot\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_1\cdot\overrightarrow{y_3}$$

$$\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}} = \overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}+\overrightarrow{\Omega_{0/3}}\wedge\overrightarrow{O_0M}$$

Q15. Déterminer l'expression de la composante du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}}$ en projection sur $\overrightarrow{y_3}$.

$$\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}} = \overrightarrow{V_{O_0\in S_0/R_3}}+\overrightarrow{\Omega_{0/3}}\wedge\overrightarrow{O_0M}$$

$$\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}} = \dot{x}(t)\cdot\overrightarrow{x_3}+\ell_0\cdot\dot{\theta}_1\cdot\overrightarrow{x_1} + \left(\dot{\theta}_0\cdot\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_1\cdot\overrightarrow{y_3}\right)\wedge\left(x_M\cdot\overrightarrow{x_0}+y_M\cdot\overrightarrow{y_0}+z_M\cdot\overrightarrow{z_0}\right)$$

$$\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}} = \dot{x}(t)\left(\cos\theta_1\overrightarrow{x_1}+\sin\theta_1\overrightarrow{z_1}\right)+\ell_0\dot{\theta}_1\overrightarrow{x_1} + \left(\dot{\theta}_0\cdot\overrightarrow{z_1}+\dot{\theta}_1\overrightarrow{y_1}\right)\wedge\Big(x_M\Big(\cos\theta_0\overrightarrow{x_1}+\sin\theta_0\cdot\overrightarrow{y_1}\Big) + y_M\left(\cos\theta_0\overrightarrow{y_1}-\sin\theta_0\overrightarrow{x_1}\right)+z_M\overrightarrow{z_1}\Big)$$

Soit en projection dans $(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}\cos\theta_1+\ell_0\dot{\theta}_1+y_M\dot{\theta}_0\cos\theta_0+z_M\dot{\theta}_1-x_M\dot{\theta}_0\sin\theta_0 \\ x_M\dot{\theta}_0\cdot\cos\theta_0-y_M\dot{\theta}_0\sin\theta_0 \\ \dot{x}\sin\theta_1-x_M\dot{\theta}_1+y_M\dot{\theta}_1\sin\theta_0 \end{pmatrix}$$

On a $\overrightarrow{y_3}=\overrightarrow{y_1}$. d'où :

$$V_{ym} = x_M\cdot\dot{\theta}_0\cdot\cos\theta_0+y_M\cdot\dot{\theta}_0\cdot\sin\theta_0$$

Q16. Établir la relation vectorielle donnant la vitesse de O_5 appartenant à S_5 dans son mouvement par rapport à S_0, notée $\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}}$, en fonction notamment des vecteurs précédemment déterminés : $\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_3}}$, $\overrightarrow{V_{M\in S_0/R_3}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S_0/R_3}}$.

$$\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}} = \overrightarrow{V_{O_5\in S_5/S3}}+\overrightarrow{V_{O_5\in S_3/R_0}}$$
$$\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}} = \overrightarrow{V_{O_5\in S_5/S3}}-\overrightarrow{V_{M\in R_0/S_3}}+\overrightarrow{\Omega_{R_0/S_3}}\wedge\overrightarrow{O_5M}$$

Q17. Le point O_5 doit se déplacer sur la surface usinée définie comme le lieu des points M. Que devient alors cette relation ? Donner l'expression, dans la base du référentiel R_3 , de $\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}}$.

Le point M est alors confondu avec O_5 : $\overrightarrow{O_5M}=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}} = \overrightarrow{V_{O_5\in S_5/S3}}-\overrightarrow{V_{M\in R_0/S_3}}$$

soit :

$$\overrightarrow{V_{O_5\in S_5/R_0}} = \begin{pmatrix} -V_{XM} \\ \dot{y}-V_{YM} \\ \dot{z}-V_{ZM} \end{pmatrix}_{R_3}$$

Q18. Écrire la fermeture cinématique de la boucle constituée des solides $\{(vis),(crou+S_4+S_5),(S_3)\}$. On reconnaît :

— liaison hélicoïdale :
$$\{\mathcal{V}_{V/E}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{V/E}}=\omega_{VE}\cdot\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V_{O_3\in V/E}}=\dfrac{p_a}{2\cdot\pi}\cdot\omega_{VE}\cdot\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O_3,\overrightarrow{y_3})},$$

— liaison glissière :
$$\{\mathcal{V}_{E/S_3}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_4\in E/S_3}} \end{Bmatrix}_{\forall P},$$

— liaison pivot :
$$\{\mathcal{V}_{V/S_3}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{V/S_3}}=\omega_m\cdot\overrightarrow{y_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{\forall P\in(O_3,\overrightarrow{y_3})}$$

avec $\overrightarrow{V_{O_3O_4\in E/S}} = \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{O_3O_4}\right]_{R_3} = \dot{\mu}\cdot\overrightarrow{y_3}$

La fermeture cinématique s'écrit, on l'écrit en O_3.

$$\{\mathcal{V}_{V/E}\}+\{\mathcal{V}_{E/S_3}\}+\{\mathcal{V}_{S_3/V}\}=\{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{V/E}}=\omega_{VE}\cdot\overrightarrow{y_3} \\ \overrightarrow{V_{O_3\in V/E}}=\dfrac{p_a}{2\cdot\pi}\cdot\omega_{VE}\cdot\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_{O_3} + \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{O_4\in E/S_3}}=\dot{\mu}\cdot\overrightarrow{y_3} \end{Bmatrix}_{O_3} - \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{V/S_3}}=\omega_m\cdot\overrightarrow{y_3} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{O_3} = \{0\}$$

soit les deux équations

$$\begin{cases} \omega_{VE}-\omega_m=0 \\ \dfrac{p_a}{2\cdot\pi}\cdot\omega_{VE}+\dot{\mu}=0 \end{cases}$$

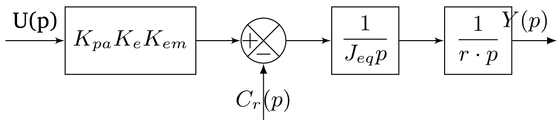
Q19. En déduire la relation entre $\dot{\mu}$ et ω_m et les autres paramètres constants.

$$\dot{\mu} = -\frac{p_a}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_m$$

Q20. En supposant les conditions initiales nulles, exprimer les relations (E1) et (E2) dans le domaine de Laplace.

$$p \cdot Y(p) = r \cdot \Omega_m(p)$$
$$C_m(p) - C_r(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p)$$

Q21. Reproduire (Ne pas répondre sur le sujet !) et compléter alors le schéma bloc de la figure 0.1.11 qui représente le modèle de l'ensemble du processus.



Q22. Dans ces conditions, écrire la fonction de transfert de la partie opérative de l'axe « Y » sous la forme : $\dfrac{Y(p)}{U(p)} = \dfrac{G_p}{p^\alpha}$. Donner α et indiquer clairement l'expression du gain G_p en fonction de K_{pa}, K_e, K_{em}, r et J_{eq}.

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K_{pa} \cdot K_e \cdot K_{em}}{J_{eq} \cdot r \cdot p^2}$$
$$G_p = \frac{K_{pa} \cdot K_e \cdot K_{em}}{J_{eq} \cdot r}$$
$$\alpha = 2$$

Q23. À partir de la figure 0.1.12 et pour la boucle de vitesse uniquement, identifier la variable de consigne, la fonction de transfert du correcteur et celle du capteur. Donner ensuite l'unité du gain du capteur en supposant que celui-ci délivre une tension.

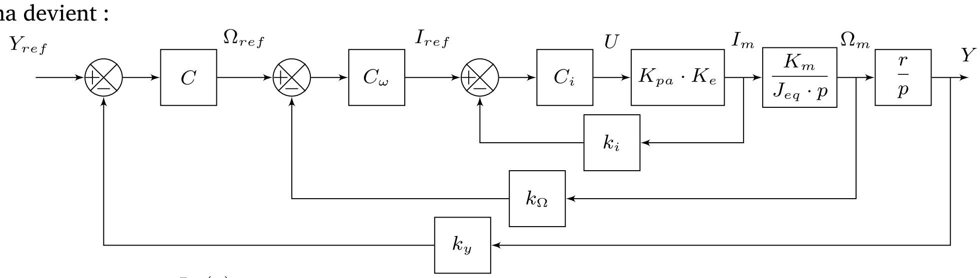
— Consigne : $\Omega_{ref}(p)$

— Correcteur : $C_\Omega(p)$

— Capteur : k_Ω en V/(rad/s)

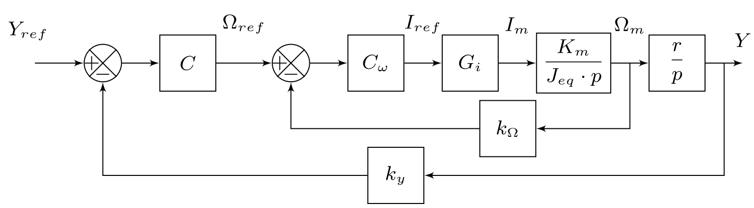
On suppose que les correcteurs de courant, de vitesse et de position sont purement proportionnels. Leurs gains sont notés respectivement $C_i(p) = C_i$, $C_\Omega(p) = C_\Omega$, et $C(p) = C$.

Le schéma devient :

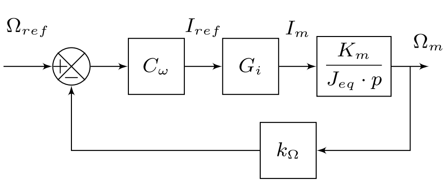


Q24. Calculer le gain $G_i = \dfrac{I_m(p)}{I_{ref}(p)}$ de la boucle de courant en fonction de k_i, C_i, K_{pa} et K_e.

$$G_i = \frac{C_i \cdot K_{pa} \cdot K_e}{1 + K_i \cdot C_i \cdot K_{pa} \cdot K_e}$$



Q25. Calculer alors la fonction de transfert de la boucle de vitesse et la mettre sous la forme : $\dfrac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \dfrac{G_\Omega}{1 + T_\Omega(p)}$. Indiquer clairement les expressions de G_Ω et T_Ω en fonction de k_Ω, C_Ω, K_{em}, J_{eq} et G_i.



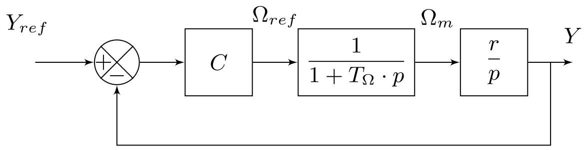
$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{\dfrac{C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \dfrac{k_\Omega \cdot C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m}{J_{eq} \cdot p}}$$
$$= \frac{C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m}{k_\Omega \cdot C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m + J_{eq} \cdot p}$$
$$\frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{ref}(p)} = \frac{1}{k_\Omega} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{J_{eq}}{k_\Omega \cdot C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m} \cdot p}$$
$$= \frac{G_\Omega}{1 + T_\Omega(p)}$$

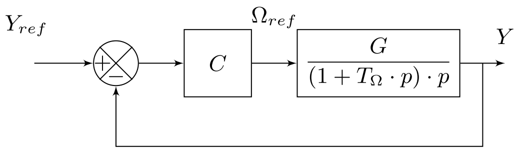
avec :

$$G_\Omega = \frac{1}{k_\Omega} \text{ et } T_\Omega = \frac{J_{eq}}{C_\Omega \cdot G_i \cdot K_m}$$

On considère, afin de simplifier les calculs, que les trois capteurs ont des gains unitaires $k_i = k_\Omega = k_y = 1$.

Q26. Montrer que le schéma bloc se met sous la forme de la figure 0.1.13. Indiquer clairement l'expression de G en fonction de r.





$$G = r$$

Q27. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée : $\dfrac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$, la mettre sous forme canonique.

$$\frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = \frac{C \cdot G}{C \cdot G + (1 + T_\Omega(p)) \cdot p}$$
$$\frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{C \cdot G} \cdot p + \dfrac{T_\Omega}{C \cdot G} \cdot p^2}$$

$$K = 1$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C \cdot G}{T_\Omega}} = \sqrt{\frac{C \cdot r}{T_\Omega}}$$
$$\xi = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C \cdot G \cdot T_\Omega}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{C \cdot r \cdot T_\Omega}}$$

Q28. Donner la condition sur T_Ω, C et G pour que la réponse temporelle ne soit pas oscillante.

Il faut

$$\xi \geq 1$$
$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{C \cdot G \cdot T_\Omega}} \geq 1$$

soit

$$\frac{1}{4} \geq C \cdot G \cdot T_\Omega$$

La machine outil doit réaliser des trajectoires plus ou moins complexes, afin de réaliser la pièce.

On se propose d'étudier le comportement du système précédent pour une trajectoire simple dans le plan (y, O_3, z).

Q29. Déterminer T en fonction des paramètres du schéma blocs.

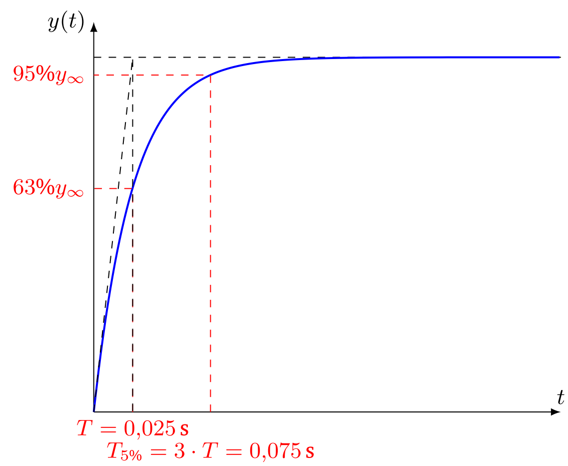
$$\frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = \frac{G \cdot C}{G \cdot C + p} = \frac{1}{1 + \dfrac{p}{G \cdot C}}$$

Q30. Déterminer $Y(p)$ puis $y(t)$. Déterminer la valeur finale : $y_\infty = \lim\limits_{t \to \infty} (y(t))$. Le système asservi est-il précis pour une entrée en échelon ?

$$\lim_{t\to\infty} (y(t) = \lim_{p \to 0} (p \cdot Y(p))$$
$$= \lim_{p\to 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{p}{G \cdot C}} \cdot Y_{ref}(p) \right)$$
$$\lim_{t\to\infty} (y(t) = \lim_{p\to 0} \left(p \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{p}{G \cdot C}} \cdot \frac{50}{p} \right) = 50$$

Le système est donc précis pour une entrée en échelon, il est donc capable de déplacer l'outil d'un point à un autre précisément.

Q31. Tracer la réponse temporelle $y(t)$. Placer sur la courbe les éléments caractéristiques.



— Trajectoire dans (Y, O_3, Z)

On ne considère que l'asservissement suivant « Y », pendant tout le déplacement, on suppose que la vitesse suivant l'axe « Z » reste constante : $V_z = \dot{z}(t) = 0{,}2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

À l'instant $t = 0$, l'outil est en $A = (0, 0)$, l'outil doit se déplacer suivant une droite jusqu'à $B = (50, 25)$.

On rappelle que la transformée de $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ est $E(p) = \dfrac{a}{p^2}$.

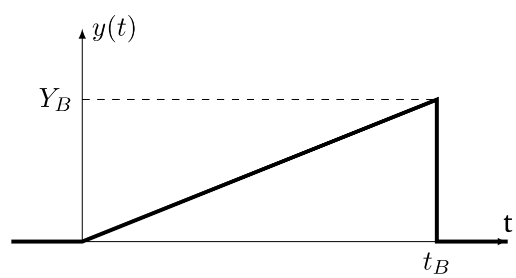


FIGURE 1 – Consigne $y_{ref}(t)$

Q32. Justifier que pour obtenir cette trajectoire, il faut que la consigne soit $y_{ref}(t) = V_y \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_B$ comme sur la figure 0.1.17 (t_B instant théorique pour lequel l'outil est en B). Déterminer V_y en fonction de V_z. Donner $Y_{ref}(p)$ (on se limitera à la description entre $t = 0$ et $t = t_B$).

Le sujet précise que l'axe « Z » se déplace à vitesse constante avec $V_z = \dot{z}(t) = 0{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Avant le point A et après le point B, l'axe « Y » est arrêté $\dot{y}(t) = 0$. Entre A et B l'axe « Z » se déplace de 25 mm et l'axe « Y » de 50 mm. On a donc : $\dot{y}(t) = 0{,}4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = V_Y = 2\cdot V_Z$.

$Y_B = V_Y \cdot t_B = 50\,\mathrm{mm}$ soit $V_Y = \dfrac{Y_B}{t_B}$.

$$y_{ref}(t) = \frac{Y_B}{t_B}\cdot t\cdot \mathcal{H}(t)$$
$$Y_{ref}(p) = \frac{Y_B}{t_B}\cdot\frac{1}{p^2}$$
$$Y_{ref}(p) = \frac{V_Y}{p^2}$$

Q33. À partir de la figure 0.1.16 :

Q33a. Déterminer $Y(p)$ en fonction de V_y et T.

$$Y(p) = \frac{1}{1+T\cdot p}\cdot V_Y\cdot\frac{1}{p^2}$$

Q33b. Déterminer $\varepsilon(p)$ en fonction de V_y et T.

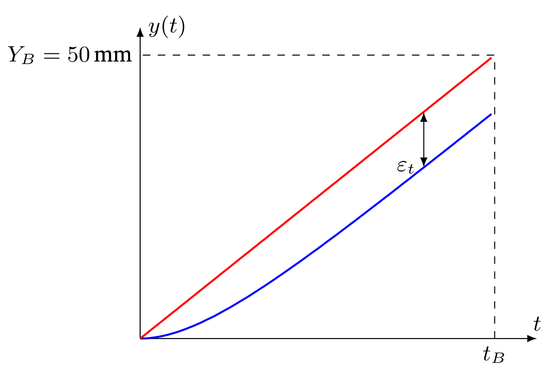
$$\varepsilon(p) = Y_{ref}(p) - Y(p) = Y_{ref}(p)\left(1-\frac{1}{1+T\cdot p}\right)$$
$$\varepsilon(p) = \left(1-\frac{1}{1+T\cdot p}\right)\cdot\frac{V_Y}{p^2}$$

Q34. Déterminer l'erreur de traînage $\varepsilon_t = \lim\limits_{t\to\infty}(\varepsilon(t))$.

À partir du théorème de la valeur finale (le système est stable) :

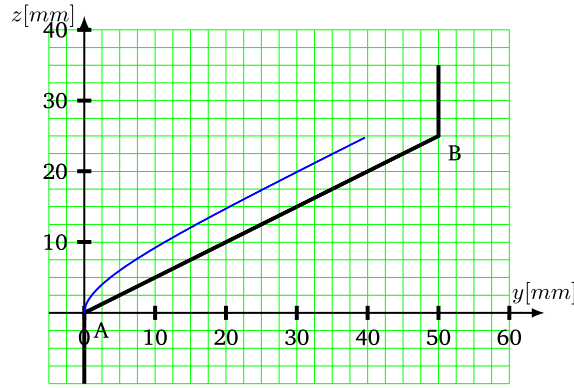
$$\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p))$$
$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(p\cdot\left(1-\frac{1}{1+T\cdot p}\right)\cdot\frac{V_Y}{p^2}\right)$$
$$= \lim_{p\to 0}\left(p\cdot\frac{T\cdot p}{1+T\cdot p}\cdot\frac{V_Y}{p^2}\right) = T\cdot V_y$$
$$= 25\times 10^{-3}\cdot 0{,}4 = 10\times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{mm}$$

Q35. Tracer sur un même graphe l'allure de la réponse temporelle $y(t)$ et la consigne $y_{ref}(p)$, placer l'erreur de traînage.



La réponse temporelle est en régime établi, parallèle à la consigne avec un retard. L'erreur de traînage est ε_t.

Q36. Reproduire la figure 0.1.16 sur votre feuille puis tracer la trajectoire de l'outil entre le point A et le point B.



Q37. Conclure sur la possibilité de réaliser cette trajectoire avec cet asservissement.

La trajectoire réalisée est en retard suivant Y, ce type de commande ne permet pas de réaliser la trajectoire voulue, il faudrait :

— diminuer la vitesse de Z en A, pour laisser à Y le temps de démarrer,

— prolonger la commande de Y pour arriver en B.

Q38. Déterminer $H_a(p) = \dfrac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$,

$$Y(p) = H(p)\cdot(C\cdot\varepsilon(p) + a\cdot p\cdot Y_{ref}(p))$$
$$Y(p) = H(p)\cdot\Big(C\cdot(Y_{ref}(p) - Y(p)) + a\cdot p\cdot Y_{ref}(p)\Big)$$
$$Y(p)\,(1+H(p)\cdot C) = H(p)\cdot(C - a\cdot p)\cdot Y_{ref}(p)$$

soit

$$H_a(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)} = H(p)\cdot\frac{C+a\cdot p}{1+H(p)\cdot C}$$
$$= \frac{G}{(1+T_\Omega\cdot p)\cdot p}\cdot\frac{C+a\cdot p}{1+\dfrac{G}{(1+T_\Omega\cdot p)\cdot p}\cdot C}$$
$$H_a(p) = \frac{G\cdot(C+a\cdot p)}{(1+T_\Omega\cdot p)\cdot p + G\cdot C} = \frac{1-\dfrac{a}{C}\cdot p}{1+\dfrac{p}{G\cdot C}+\dfrac{T_\Omega}{G\cdot C}\cdot p^2}$$

Q38a. Mettre sous la forme :
$H_1(p) = \dfrac{1+T_1\cdot p}{1+T_2\cdot p+T_2\cdot T_3\cdot p^2}$.

Q38b. Indiquer T_1, T_2 et T_3 en fonction des paramètres du schéma bloc de la figure 0.1.19.

On a donc : $T_1 = \dfrac{a}{C}$, $T_2 = \dfrac{1}{G\cdot C}$ et $T_3 = T_\Omega$

Q39. Déterminer $\varepsilon(p)$ en fonction de $Y_{ref}(p)$ et des autres paramètres.

$$\varepsilon(p) = Y_{ref}(p)\cdot(1-H_a(p))$$

On pose $a = \dfrac{1}{G}$

Q40. Déterminer l'erreur de traînage $\varepsilon(p)$. Conclure sur l'effet de la commande par anticipation.

$$\varepsilon_t = \lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot(p)\cdot(1-H_a(p))\cdot Y_{ref})$$
$$= \lim_{p\to 0}(p\cdot(p)\cdot(1-H_a(p)))\cdot\frac{V_Y}{p^2}$$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \to 0}(p \cdot \left(1 - \frac{1 + T_1 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2}\right) \cdot \frac{V_Y}{p^2}$$
$$= \lim_{p \to 0}\left(p \cdot \frac{T_2 \cdot p + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2 - T_1 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2} \cdot \frac{V_Y}{p^2}\right)$$

Avec $T_1 = T_2$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \to 0}\left(p \cdot \frac{T_2 \cdot T_3 \cdot p^2}{1 + T_2 \cdot p + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2} \cdot \frac{V_Y}{p^2}\right)$$
$$= \lim_{p \to 0}\left(\frac{T_2 \cdot T_3 \cdot p}{1 + T_2 \cdot p + T_2 \cdot T_3 \cdot p^2} \cdot V_Y\right) = 0$$
