

Principe fondamental de la statique

Le principe fondamental de la statique (P.F.S.) exprime les conditions d'équilibre d'un système matériel dans un référentiel.

11.1 Définitions préalables

11.1.1 Système matériel - Système matériel isolé

On appelle système matériel tout ensemble constitué de solides et de fluides.

Un système isolé, est un système matériel que l'on rend distinct de son environnement. Le système isolé peut être une pièce mécanique, un ensemble de pièces, une partie de pièce, un fluide. L'isolement consiste à couper l'espace en deux parties disjointes afin de séparer, le système isolé (Σ) de son environnement ($\bar{\Sigma}$).

On nomme frontière d'isolement la limite entre les deux milieux.

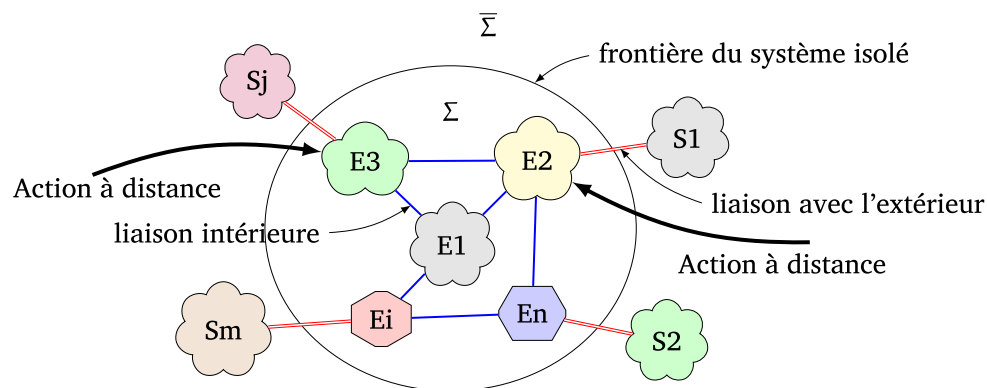


FIGURE 11.1 – Système isolé

11.1.2 Équilibre d'un système matériel

On dit qu'un système est en équilibre par rapport à un repère \mathcal{R}_0 entre deux dates t_1 et t_2 si tous les points du système isolé sont invariants dans \mathcal{R}_0 .

11.1.3 Équilibre d'un ensemble de solide

Pour qu'un système composé d'un ensemble de solides soit en équilibre, il faut et il suffit que :

- il soit en équilibre à l'instant de l'étude,
- chacun des solides qui le composent soit en équilibre.

11.1.4 Actions mécaniques extérieures

On appelle action mécanique extérieure appliquée à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact, soit des actions à distance (gravité).

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \end{array} \right\}_P$$

11.1.5 Actions mécaniques intérieures

Les actions mécaniques intérieures sont les actions mécaniques que s'exercent mutuellement les différents constituants du système isolé.

Remarque : la notion d'actions mécaniques extérieures et intérieures ne dépend que de la frontière du système isolé.

11.2 Principe fondamental de la statique - P.F.S.

11.2.1 Énoncé

Il existe au moins un repère galiléen tel que pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à ce repère, le torseur représentatif des actions extérieures qui lui sont appliquées est égal au torseur nul :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

En décomposant le torseur des actions extérieures chaque action extérieure on peut écrire :

$$\{\mathcal{A}_{S_1 \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{A}_{S_2 \rightarrow E_2}\} + \{\mathcal{A}_{S_i \rightarrow E_j}\} + \dots = \{0\}$$

puis en sommant chaque torseur au même point :

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_1 \rightarrow E_1}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_1 \rightarrow E_1}} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_2 \rightarrow E_2}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_2 \rightarrow E_2}} \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P + \dots = \{0\}$$

$$\sum_i \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

Remarque : le principe fondamental de la statique est énoncé dans un repère galiléen, compte tenu des mécanismes étudiés et dans la mesure où la durée de l'étude est courte, un repère lié à la terre est une bonne approximation. La notion de repère galiléen sera approfondi en seconde année et dans le cours de physique.

Remarque : la condition

$$\{\mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}\} = \{0\}$$

appliquée à un ensemble de solides n'implique pas que l'ensemble est en équilibre. Il est nécessaire de vérifier que chaque solide constituant l'ensemble est lui-même en équilibre.

11.2.2 Théorèmes généraux

À partir de

$$\sum_{i,j} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} \end{array} \right\}_P = \{0\}$$

on déduit les deux théorèmes généraux de la statique.

a) Théorème de la résultante statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen, la résultante du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{R_{S_i \rightarrow E_j}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

b) Théorème du moment statique

Pour tout ensemble matériel (E) en équilibre par rapport à un repère galiléen, le moment du torseur représentatif des actions extérieures appliquées à (E) est un vecteur nul.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{P, \bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} &= \vec{0} \\ \sum_{i,j} \overrightarrow{M_{P, S_i \rightarrow E_j}} &= \vec{0} \end{aligned}$$

c) Écriture scalaire du principe fondamental de la statique

L'équilibre d'un ensemble matériel Σ est décrit par un système linéaire de 6 équations, 3 équations pour traduire le théorème de la résultante statique et 3 pour le moment statique.

$$\begin{cases} \sum_i X_i = 0 \\ \sum_i Y_i = 0 \\ \sum_i Z_i = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \sum_i L_i = 0 \\ \sum_i M_i = 0 \\ \sum_i N_i = 0 \end{cases}$$

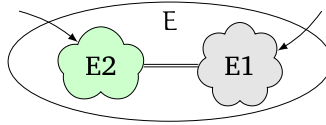
avec X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i et N_i les composantes des actions mécaniques extérieures à Σ .

11.2.3 Théorème des actions réciproques

L'action mécanique du système (E1) sur le système (E2) est opposée à l'action mécanique de (E2) sur (E1).

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$$

Pour le démontrer, considérons un système matériel (E) composé de deux systèmes matériels $E = \{E1 + E2\}$.



On applique le P.F.S. successivement à (E1), (E2) et (E).

— On isole E1, le P.F.S. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{1} \rightarrow 1}\} = \{0\} \quad \text{or } \bar{1} = 2 + \bar{E}$$

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow 1}\} = \{0\}$$

— On isole E2, le P.F.S. s'écrit :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{2} \rightarrow 2}\} = \{0\} \quad \text{or } \bar{2} = 1 + \bar{E}$$

$$\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

— On isole E, le P.F.S. s'écrit en faisant apparaître les solides 1 et 2 :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E}\} = \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow \{E_1 + E_2\}}\} = \{0\}$$

On obtient :

$$\{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E_1}\} + \{\mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E_2}\} = \{0\}$$

Finalement on trouve en ajoutant les trois égalités (a) + (b) - (c), la relation recherchée.

$$\{\mathcal{A}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 2}\}$$

11.2.4 Principe fondamental de la statique pour un ensemble de solides

Pour un système composé de N solides, ce système est en équilibre si chaque solide le composant est en équilibre.

Il est donc nécessaire d'écrire le P.F.S. sur $(N - 1)$ solides ou ensemble de solide. Il n'est pas utile d'écrire le P.F.S. sur le dernier solide, celui-ci peut s'obtenir par combinaison linéaire des autres équilibres.

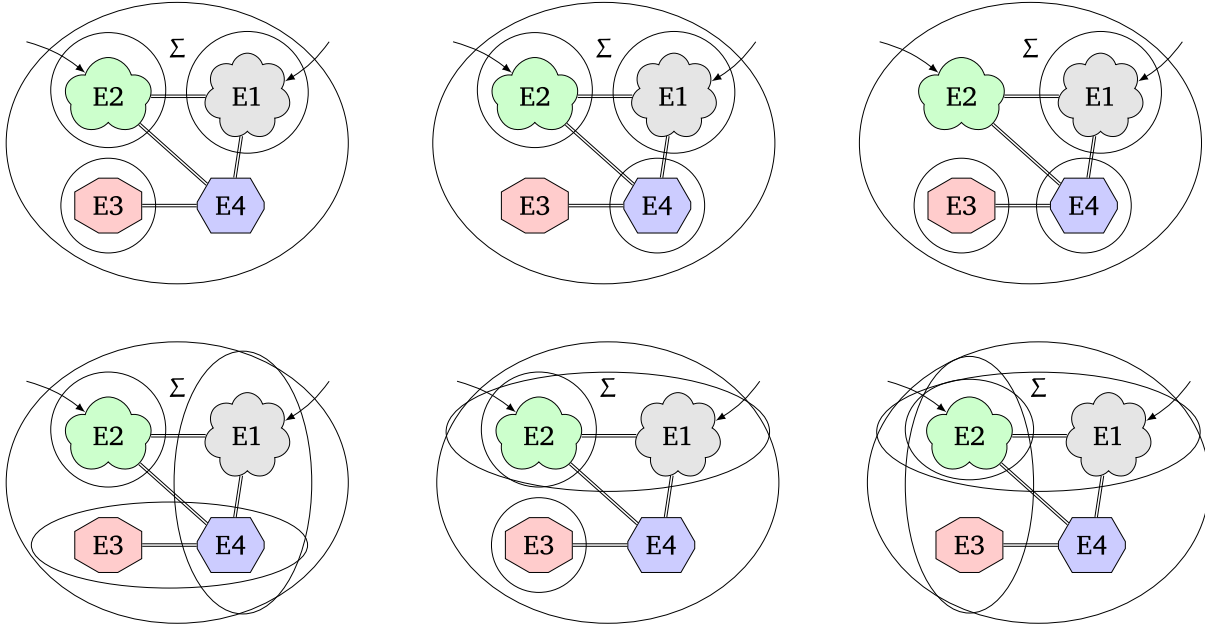


FIGURE 11.2 – Quelques isolements possibles de 4 solides

La figure 11.2 présente quelques possibilités d'isolement d'un mécanisme de 4 solides. Chaque solide peut être isolé seul, ou associé à d'autres.

Tous ces isolements vont donner le même résultat mais pas nécessairement la même quantité de calcul. Il faut donc s'attacher lors d'une résolution à limiter le nombre d'équations et d'inconnues en choisissant judicieusement les isolements.

Pour les cas de la figure 11.2 l'étude complète comprend : $E_s = 6 \cdot (N - 1) = 18$ équations avec $I_s = \sum_i n_{s_i}$ inconnues (avec n_{s_i} le nombre d'inconnues de liaison de chaque liaison).

11.3 Résolution d'un problème de statique

11.3.1 Mécanismes spatiaux - Cas général

On peut classer les problèmes de statique dans deux familles, suivant que l'on s'intéresse à la relation entre les efforts « extérieurs » appliqués sur le système ou aux efforts dans les liaisons en fonction des efforts extérieurs connus.

Dans le premier cas on essaiera d'identifier les équations extraites du P.F.S. juste nécessaires pour obtenir le résultat cherché, dans l'autre cas il sera souvent nécessaire de tout écrire.

a) Domaine d'utilisation du P.F.S.

Le P.F.S. est utilisé pour déterminer les actions mécaniques d'un mécanisme immobile. Il peut aussi être utilisé lorsque les vitesses des solides sont constantes (en translation) et/ou que les masses et inerties des solides sont négligeables.

b) Procédure de résolution du problème

Analyser le mécanisme, c'est-à-dire :

- Caractérisation du mécanisme :
 - préciser les classes d'équivalence cinématique,
 - définir les liaisons (torseurs des actions transmissibles),
 - établir le graphe de structure,
 - faire le bilan des inconnues de liaison,
 - préciser si nécessaire les liaisons parfaites ou non.
- Identifier les efforts appliqués sur le mécanisme :
 - action à distance (poids),
 - efforts extérieurs, moteur, vérin, ressort, etc,
 - efforts intérieurs,
 - placer ces efforts sur le graphe de structure.
- Définir les ensembles à isoler (pièce seule ou ensemble de pièces) :
 - choisir les ensembles en fonction du nombre d'inconnues par isolement, essayer de ne faire que des isolements que l'on peut résoudre (6 inconnues au maximum) ou qui donne rapidement des informations pour la suite des calculs, commencer par :
 - solide ou ensemble de solides soumis à 2 glisseurs (voir chapitre 11.3.2),
 - solide ou ensemble de solides soumis à 3 glisseurs (voir chapitre 11.3.3).
- Résoudre progressivement le système :
 - écrire le P.F.S. sur chaque sous-système isolé du moins complexe vers le plus complexe,
 - intégrer les résultats des isolements précédents avant de poursuivre l'application du P.F.S.

11.3.2 Solide soumis à 2 glisseurs

Soit un solide soumis à deux actions mécaniques une en A, l'autre en B représentables par des torseurs glisseurs.

$$\{\mathcal{J}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \quad \text{et} \quad \{\mathcal{J}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

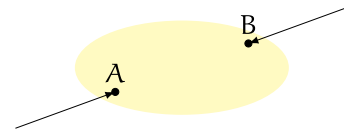


FIGURE 11.3 – Solide soumis à 2 glisseurs

Alors les deux résultantes :

- ont même norme $\|\vec{R}_A\| = \|\vec{R}_B\|$,
- et sont de direction opposée $\vec{R}_A = -\vec{R}_B$ portées par $\vec{u} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$.

Remarque : par abus de langage on dira « solide soumis à deux glisseurs » pour « solide soumis à deux actions mécaniques représentables par des torseurs glisseurs ».

Pour vérifier, il suffit d'appliquer le P.F.S. au solide en A.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{J}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{J}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} &= \{\vec{0}\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \end{array} \right\}_A &= \{\vec{0}\} \end{aligned}$$

On a bien

$$\vec{R}_A = -\vec{R}_B \quad \text{et} \quad \vec{AB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}$$

Le produit vectoriel est nul si \vec{R}_B est colinéaire à \vec{AB} .

11.3.3 Solide soumis à 3 glisseurs

Soit un solide soumis à l'action de 3 torseurs glisseurs, en A, B et C,

$$\{\mathcal{T}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \quad \{\mathcal{T}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{C_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_C \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

- alors les trois droites supports sont coplanaires et
 - soit les trois droites supports des résultantes sont concourantes en I;
 - soit les trois résultantes sont parallèles.

Montrons dans un premier temps la coplanarité :

Le P.F.S. en A s'écrit :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{C_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} &= \{0\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{AB} \wedge \vec{R}_B \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_C \\ \vec{AC} \wedge \vec{R}_C \end{array} \right\}_A &= \{0\} \end{aligned}$$

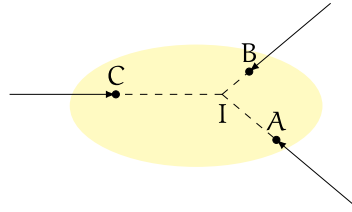


FIGURE 11.4 – Solide soumis à 3 glisseurs

Le théorème de la résultante statique s'écrit :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{R}_C = \vec{0}$$

La somme vectorielle est nulle.

Le théorème du moment s'écrit :

$$\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{R}_C = \vec{0}$$

pour que cette somme soit nulle, il faut que les deux vecteurs soient opposés :

$$\vec{AB} \wedge \vec{R}_B = -\vec{AC} \wedge \vec{R}_C$$

Ces vecteurs sont donc perpendiculaires au plan (\vec{AB}, \vec{R}_B) et au plan (\vec{AC}, \vec{R}_C) . Le point A étant commun aux deux plans, les vecteurs \vec{R}_B et \vec{R}_C sont dans le plan (A, B, C).

On montre de la même manière que \vec{R}_A est aussi dans le plan (A, B, C).

Montrons maintenant que soit les résultantes sont soit concourantes, soit parallèles.

Résultantes concourantes : Soit I le point d'intersection des deux droites supports de \vec{R}_A et \vec{R}_B . Les torseurs de l'action mécanique en A et B s'écrivent en I :

$$\{\mathcal{T}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$$

Le P.F.S. s'écrit donc en I :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{A_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{B_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} + \{\mathcal{T}_{C_{\text{ext} \rightarrow 1}}\} &= \{0\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_A \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_B \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_C \\ \vec{IC} \wedge \vec{R}_C \end{array} \right\}_I &= \{0\} \end{aligned}$$

Du théorème du moment, on déduit :

$$\vec{IC} \wedge \vec{R}_C = \vec{0}$$

Ce vecteur n'est nul que si $\vec{IC} // \vec{R}_C$. Les trois résultantes sont donc concourantes.

Résultantes parallèles : Soit \vec{R}_A et \vec{R}_B les résultantes de deux actions mécaniques avec $\vec{R}_A // \vec{R}_B$.

Le théorème de la résultante s'écrit :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{R}_C = \vec{0}$$

$\vec{R}_C = -(\vec{R}_A + \vec{R}_C)$ est donc aussi parallèle aux deux autres. Le théorème du moment s'écrit :

$$\vec{AB} \wedge \vec{R}_B + \vec{AC} \wedge \vec{R}_C = \vec{0}$$

11.3.4 Mécanismes plans

Hypothèses spécifiques

On peut modéliser un système par un système « plan », si :

- la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un plan de symétrie,
 - tous les mouvements de rotations sont perpendiculaires à ce plan,
 - tous les mouvements de translations sont parallèles à ce plan ;
- les actions mécaniques extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan,
 - les résultantes des actions mécaniques extérieures sont parallèles au plan de symétrie,
 - les moments des actions mécaniques extérieures sont perpendiculaires au plan de symétrie.

Les torseurs des actions mécaniques se mettent alors sous la forme :

$$\{\mathcal{A}_{\text{ext} \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ [0] \end{array} \right\}_P \begin{array}{c} [0] \\ [0] \\ N \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \end{array} \right\}$$

avec P un point du plan de symétrie et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base avec \vec{z} la normale au plan.

Nous avons déjà vu la notion de mécanisme plan du point de vue de la cinématique, cela correspond à des mécanismes dont les seuls mouvements possibles sont des translations parallèles au plan d'étude, et/ou des rotations perpendiculaires à ce plan.

La notion de mécanisme plan du point de vue de statique complète cette notion en imposant une répartition spatiale symétrique des efforts par rapport au plan d'étude.

Remarque : dans ce manuel, la notation [0], correspond à une valeur nulle pour la composante du torseur par le choix de l'hypothèse « mécanisme plan ».

Le tableau 11.1 présente les 3 liaisons utilisables pour modéliser un mécanisme plan.

11.4 Notion d'hyperstaticité

Le P.F.S. permet, a priori, de déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles par une liaison. On nomme ces composantes, les inconnues statiques de la liaison.

Lorsque l'on étudie l'équilibre d'un mécanisme comportant N solides et L liaisons, chaque liaison comportant n_{si} inconnues ($0 < n_{si} < 6$), on doit résoudre un système d'équation comportant :

- $E_s = 6 \cdot (N - 1)$ équations,
- $I_s = \sum_{i=1}^L n_{si}$ inconnues.

Ce système ne peut être résolu que si $I_s = r_s$ avec r_s le rang du système d'équation :

- si $I_s > r_s$, il n'est pas possible de tout déterminer, le mécanisme est dit alors **hyperstatique**.
On nomme $h = I_s - r_s$ le degré d'hyperstaticité.

11.4 Notion d'hyperstaticité

— si $r_s = I_s$, toutes les inconnues de liaison sont déterminables en fonction des efforts « extérieurs » appliqués sur le mécanisme. Le mécanisme est dit **isostatique**, alors $h = 0$.

On peut aussi déduire de cette étude le degré de mobilité du mécanisme, c'est-à dire, le nombre de mouvements indépendant du mécanisme.

On nomme $m = E_s - I_s$ le degré de mobilité du mécanisme.

— Si $m = 0$ le mécanisme est immobile.

— Si $m > 0$, le mécanisme est alors dit mobile de degré m .

Ces notions de mobilité et d'hyperstaticité sont approfondies en deuxième année.

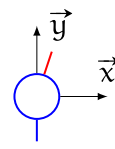
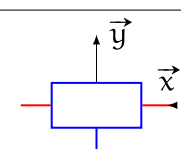
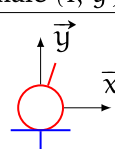
Liaison Pivot plane ou articulation : liaison pivot plane d'axe (O, \vec{z})		
<p>Torseur cinématique</p> $\begin{Bmatrix} [0] & 0 \\ [0] & 0 \\ \omega_z & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	<p>Torseur des actions transmissibles</p> $\begin{Bmatrix} X & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	<p>Symbole</p> 
Liaison Glissière plane : Glissière plane de direction \vec{x}		
$\begin{Bmatrix} [0] & V_x \\ [0] & 0 \\ 0 & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	$\begin{Bmatrix} 0 & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & N \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	
Liaison ponctuelle plane : Ponctuelle plane de normale (I, \vec{y})		
$\begin{Bmatrix} [0] & V_x \\ [0] & 0 \\ \omega_z & [0] \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>1 inconnue cinématique</p>	$\begin{Bmatrix} 0 & [0] \\ Y & [0] \\ [0] & 0 \end{Bmatrix}_{\substack{\forall P \in (O, \vec{z}) \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}}$ <p>3 inconnues de liaisons</p>	

TABLEAU 11.1 – Liaisons planes

11.5 Feuille de travaux dirigés n°11

Exercice 1 - Colonne de levage

CCP MP 2011

Corrigé page 20

Les sociétés de transports publics des grandes agglomérations gèrent des réseaux comportant des bus et/ou des tramways. Ces sociétés possèdent des centres de maintenance ayant en charge l'entretien et la réparation de leurs véhicules. Parmi ces véhicules, on peut trouver des tramways de deux types : sur rails ou sur pneus. On s'intéresse ici à la maintenance de tramways sur rails de type T.F.S. (Tramway Français Standard).

Les rames T.F.S. sont dotées d'un plancher bas, à 35 cm au-dessus du sol, sur les 3/4 de leur longueur. Dans le cadre d'une opération de maintenance, il est nécessaire d'intervenir sous le tramway et donc de le soulever entièrement.

Pour soulever un tramway de 45 tonnes et de 30 mètres de long, le service de maintenance utilise 8 colonnes de levage d'une capacité unitaire maximale de 8,2 tonnes commandées simultanément



Vérification du critère de non-basculement (stabilité mécanique)

Objectif : vérifier le NON-BASCULEMENT d'une colonne dans le plan yOz . La stabilité mécanique de la colonne doit être assurée, quelle que soit la charge à soulever.

Le modèle retenu (figure 11.5) pour cette étude est le suivant :

- Système isolé : colonne entière.
- Le plan yOz est plan de symétrie pour les efforts et la géométrie.
- Le poids des éléments de la colonne est négligé par rapport à la charge à soulever.
- L'action de contact sol/colonne est modélisée par une répartition de pression $q(y)$ variant linéairement entre q_1 et q_2 pour $y \in [e, e + L]$, et restant uniforme selon x , comme indiqué sur la figure 11.5. L'unité de $q(y)$ est le MPa.
- La charge à soulever est modélisée par un glisseur $\vec{F}_{T \rightarrow C} = -F_T \cdot \vec{z}$ dont le support passe par le point P situé à la distance d de l'axe (O, \vec{x}) de la vis du chariot.

Q1. Déterminer la résultante $\vec{R}_{s \rightarrow C}$ de l'action mécanique du sol sur la colonne, en fonction de q_1 , q_2 et des dimensions.

Q2. Déterminer le moment en O, $\vec{M}_{O, s \rightarrow C}$, de cette action mécanique, puis en P, $\vec{M}_{P, s \rightarrow C}$.

Q3. En déduire le torseur de l'action mécanique du sol, $\{\mathcal{T}_{s \rightarrow C}\}$, sur la colonne en P.

Q4. Déterminer q_1 et q_2 en fonction de F_T et de d .

Q5. Pour éviter la déformation du sol, les valeurs q_1 et q_2 ne doivent jamais être nulles. En déduire les valeurs mini et maxi de d .

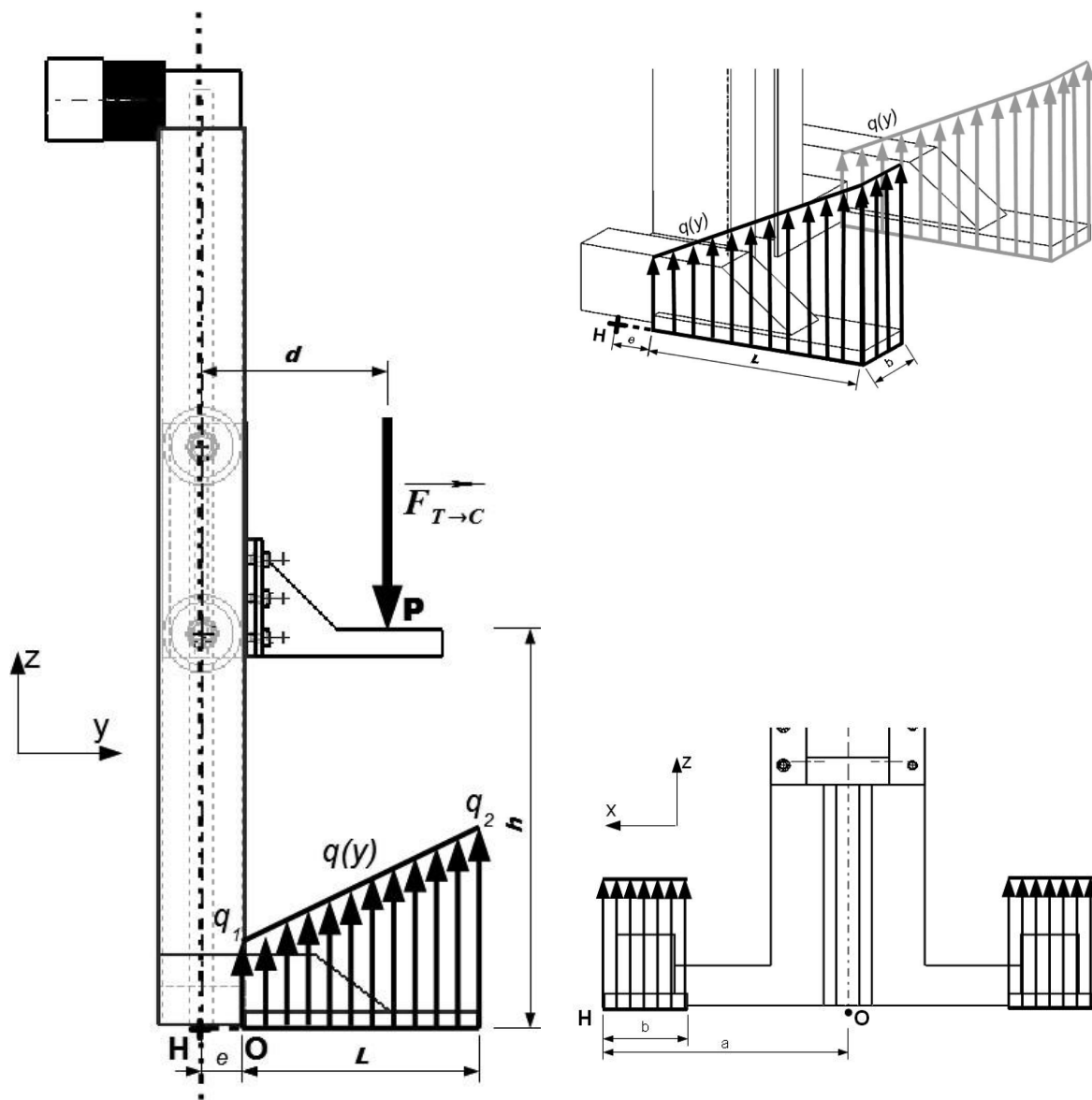


FIGURE 11.5 – Modélisation du contact sol/colonne

Exercice 2 - Arc-boutement

Extrait de ESIM 2001

Corrigé page 21

A. Données

Une colonne de décoration supporte plusieurs consoles.

Ces consoles peuvent être déplacées à volonté le long de la colonne et on peut placer sur celle-ci des objets dont la masse ne dépasse pas 20 kg.

Un objet de masse M est placé en C sur la console. La masse de la console est négligée.

Le coefficient de frottement entre la colonne et la console est $f = 0,3$.

On se propose d'établir à quelle condition la console ne glisse pas.

A.1. Modèle de contact ponctuel

On considère dans un premier temps que le jeu entre la colonne et la console est tel que l'action mécanique entre les deux solides est limitée aux deux points A et B (figure 11.6a).

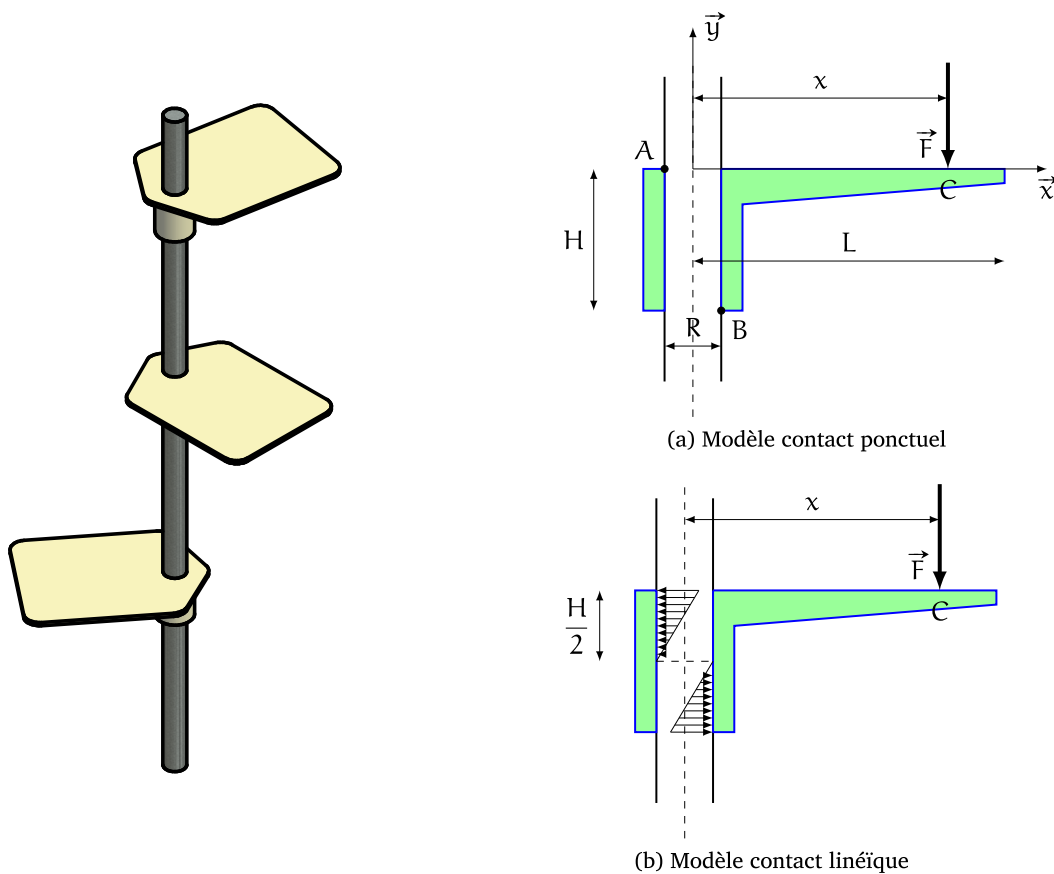


FIGURE 11.6 – Arc-boutement

On se place à la limite du glissement.

Q1. Préciser les actions mécaniques en A et B de la colonne (1) sur la console (2), préciser vos hypothèses. Représenter ces actions mécaniques sur le schéma.

Q2. À quelle condition la console reste-t-elle immobile? Représenter graphiquement cette condition.

Q3. Déterminer la condition sur la distance x_{lim} en fonction de H et f pour que la console soit immobile.

On note \vec{R}_A et \vec{R}_B la résultante de l'action mécanique respectivement en A et B.

Q4. Déterminer \vec{R}_A et \vec{R}_B en fonction de F, x_{lim} et H.

A.2. Modélisation linéique

Le modèle précédent, n'est pas très réaliste, le contact est probablement réparti le long des génératrices passant par A et B.

Le modèle choisi, est décrit sur la figure 11.6b. On suppose une répartition linéaire de la pression de contact de chaque côté entre P_{max} aux deux extrémités et 0 au milieu. On note toujours $f = 0,3$ le coefficient de frottement.

Q5. Calculer la répartition de pression $P(y)$ en fonction de H, P_{Max} et y .

Q6. Déterminer la résultante de l'action mécanique équivalente $\vec{R}_{0 \rightarrow 1}^A$ à cette répartition de pression en fonction de H, P_{Max} et f du côté A. Montrez que cette action est représentable en un glisseur en A^* avec $\vec{AA}^* = -\frac{1}{3} \cdot \frac{H}{2} \cdot \vec{y}$. En déduire le torseur en B^* .

Q7. On note x_{lim2} la distance limite, la distance x_{lim} calculée pour l'étude du premier modèle, est-elle modifiée? Conclure.

Q8. Déterminer $\vec{R}_{0 \rightarrow 1}^A$ en fonction de F, f.

Q9. Déterminer P_{Max} en fonction de F, f et H.

Exercice 3 - Simulateur de vol - Compensateur de pesanteur

Extrait de Icna 2012 - PSI

Corrigé page 23

Présentation et problématique

Le simulateur de vol étudié doit permettre de simuler les différentes accélérations que doit subir le pilote.

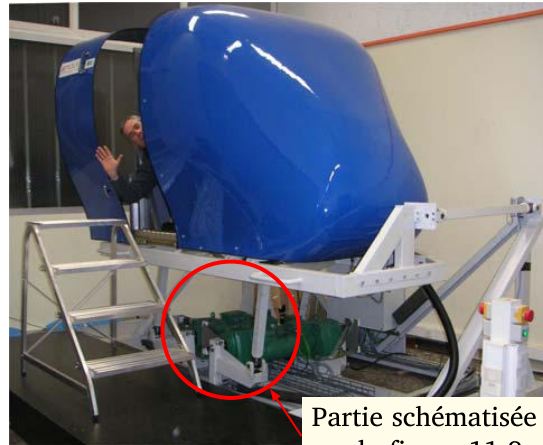
Pour éviter de sur-dimensionner les moteurs du simulateur et minimiser l'énergie, on souhaite installer un système permettant de compenser les effets de la pesanteur et ainsi d'équilibrer le poids du cockpit à l'arrêt.

Justification de l'intérêt d'un système de compensation de la pesanteur

On se place dans le cas simplifié d'un seul mouvement de translation verticale de vitesse et d'accélération suivant \vec{y} .

Dans cette étude, on s'appuie sur un schéma (figure 11.8) fortement simplifié du mécanisme.

Ce mécanisme simplifié est supposé plan.



Partie schématisée sur la figure 11.8

FIGURE 11.7 – Simulateur de vol

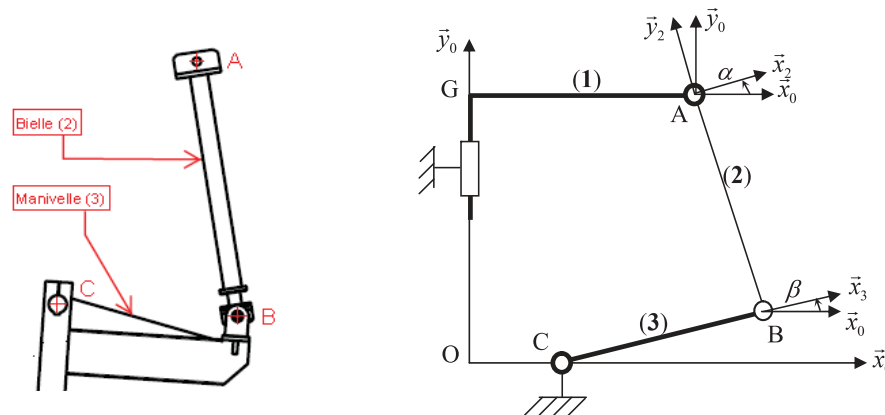


FIGURE 11.8 – Modèle cinématique simplifié

On considère que le cockpit (1) est supposé ici en liaison glissière avec le bâti (0) tel que $\vec{OG} = y \cdot \vec{y}_0$. Le moto-réducteur (M) entraîne en rotation la manivelle (3) autour de l'axe (C, \vec{z}_0) tel que $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$ et on note $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$. On note $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$ le couple fourni par le moteur sur la manivelle (3).

La bielle (2) est liée au cockpit (1) et à la manivelle (3) par des liaisons pivot d'axe (A, \vec{z}_0) et (B, \vec{z}_0) avec $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

Enfin on pose $\vec{CB} = d \cdot \vec{x}_3$, $\vec{OC} = c \cdot \vec{x}_0$, $\vec{GA} = a \cdot \vec{x}_0$ et $\vec{BA} = b \cdot \vec{y}_2$.

Seule la masse du cockpit est prise en compte, on note M cette masse, le poids du cockpit est appliqué en G .

Q1. Écrire la fermeture géométrique. en déduire les deux relations reliant y , β et α .

Q2. Simplifier ces relations en considérant que la manivelle (3) reste pratiquement horizontale au cours du mouvement de translation du cockpit et que la bielle (2) reste pratiquement perpendiculaire au plan du cockpit (β et α petits), en déduire une relation reliant y à β .

On se propose de déterminer le couple moteur C_m que doit délivrer le moteur.

Q3. Tracer le graphe de structure en précisant les torseurs des actions transmissibles par les liaisons dans le cas du modèle plan et les actions mécaniques.

On isole successivement les solides (2), (1) puis (3).

Q4. Écrire les équations relatives au solide (2).

Q5. Déterminer l'action de liaison en A en fonction de la masse M du cockpit et α .

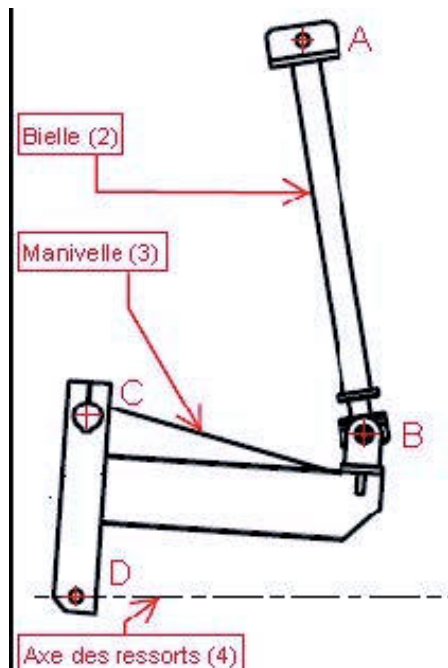
Q6. Déterminer C_m en fonction de M .

On constate que pour maintenir le cockpit en équilibre, il est nécessaire de fournir un couple moteur non négligeable. Afin de minimiser l'énergie nécessaire, le concepteur a placé deux ressorts, un de chaque côté (figure 11.9b et le schéma figure 11.9a) qui agissent sur la manivelle pour maintenir le cockpit au repos à l'arrêt.

On note $\overrightarrow{DC} \cdot \vec{y}_0 = f$.

Au repos ($\beta = 0^\circ$), le moteur doit fournir un couple nul ($C_m = 0$) seuls les deux ressorts compensent le poids du cockpit (on note $\vec{F}_r = F_r \cdot \vec{x}_0$ l'action d'un ressort sur la manivelle).

Q7. Reprendre l'équilibre de la manivelle, déterminer F_r en fonction de M .



(a) Schéma du mécanisme de compensation par ressorts



(b) Localisation

FIGURE 11.9 – Système de compensation par ressorts

Exercice 4 - Ascenseur à bateau de Strepv-Thieu - Freiange

Corrigé page 24

Pour combler le dénivelé de 88,15 mètres, l'ancien dispositif, utilisait quatre ascenseurs hydrauliques successifs sur 12 kilomètres, mais était limité à des péniches de 300 tonnes. Il fût donc décidé de moderniser ce maillon délicat. La construction des écluses d'Obourg-Warton et de Havré permettant de gagner respectivement 5 mètres et 10 mètres, il reste à franchir une chute de 73,15 mètres. Après étude des différentes solutions possibles, celle d'un unique ascenseur est finalement retenue. L'ascenseur fluvial funiculaire de STREPv-THIEU voit donc le jour et fonctionne pour la première fois en 2001.

On se propose dans cette étude d'étudier le freinage des bacs



FIGURE 11.10 – ascenseur fluvial de Strepv



FIGURE 11.11 – salle des machine

Sous l'action d'un vérin hydraulique, en fonction du pilotage de celui-ci, le bras 1 est soumis à l'action d'aucune masse, de M_1 seule ou de M_1 et M_2 .

Ceci crée un freinage du tambour 9 (qu'il soit en phase de montée ou de descente).

Le mécanisme de freinage est schématisée sur la figure 11.12.

Hypothèses et données

- le mécanisme est supposé plan,
- les mouvements sont de très faibles amplitudes,
- on néglige tous les poids sauf ceux des masses,
- on note

- $f = \tan(\varphi)$ le coefficient de frottement aux contacts entre les mâchoires 6 et 8 avec le tambour 9.
- O_5 et O_7 les centres des liaisons respectivement entre (5) et (0) et entre (7) et (0),
- A_5 et A_7 les centres des liaisons respectivement entre (6) et (5) et entre (8) et (7),
- B_5 et B_7 les centres des liaisons respectivement entre (4) et (5) et entre (10) et (7),
- C_4 le centre de la liaison entre (4) et (10),
- O_9 le centre du tambour (9),
- β l'angle de contact entre la mâchoire (6) et le tambour (9),
- α l'angle entre la direction principale de (10) et l'horizontale,
- vous préciserez toute autre donnée utile.

Q1. Tracer le graphe de structure, préciser les efforts,

Q2. Que peut-on dire de la direction de mécanisme de (2) sur (1) et de (2) sur (4)? En déduire la norme et la direction.

Q3. Que peut-on dire de la direction de l'action de (10) sur (4) et de (10) sur (7)? En déduire la norme et la direction des actions mécaniques sur (10).

Q4. En déduire la direction de l'action de (4) sur (5).

Q5. Justifiez que le moment de l'action du frein à tambour (6) sur (1) est nul en A_5 .

Q6. Déterminer les actions exercées par les mâchoires sur le tambour (les masses M_1 et M_2 étant "en action) puis calculer le couple de freinage. R est le rayon du tambour.

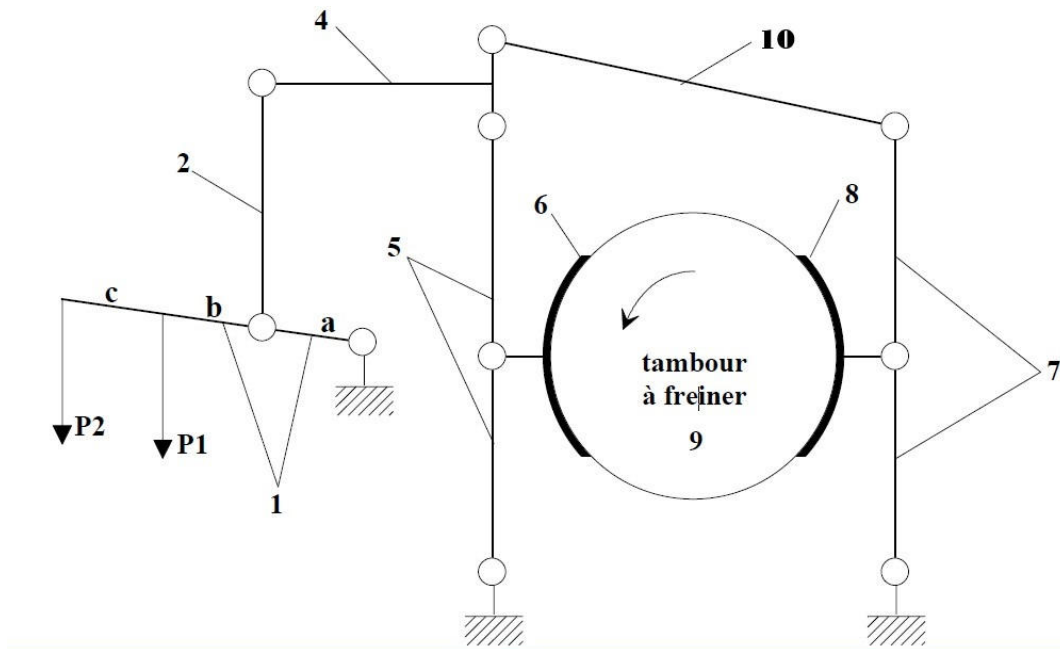


FIGURE 11.12 – mécanisme de freinage

A. Présentation

La fonction d'une écluse (figure 11.13) est de permettre à un bateau de franchir un dénivelé.

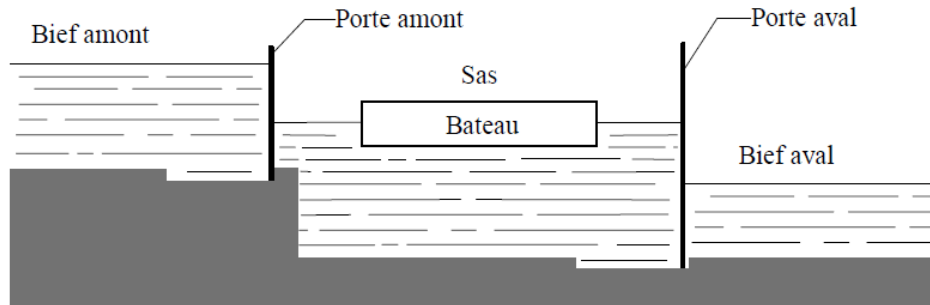


FIGURE 11.13 – Écluse de canal

Chaque porte est constituée de deux vantaux (figure 11.14). La figure 11.15 représente un vantail et le vérin qui le met en mouvement.

Le vantail (1) de largeur L et de hauteur H repose à sa partie basse sur une « crapaudine » modélisée par une liaison rotule. Il est maintenu à sa partie haute par un « étrier » modélisé par une liaison linéaire-annulaire. Il est ainsi globalement en liaison pivot d'axe vertical avec le « bajoyer (0) » (les murs).

Pour le canal de Bourgogne les portes font $L = 3,44$ m de largeur et la hauteur totale d'eau est de $H = 3$ m.

La liaison du corps (2) du vérin avec le bajoyer (0) est de type « cardan », ici la liaison est modélisée par une liaison sphérique (à la place d'une sphérique à doigt). La tige (3) du vérin est en liaison rotule avec le vantail (1) et en liaison pivot-glissant avec le corps (2).

La masse du vantail est M_1 , le centre d'inertie G_1 est au centre du panneau. Les autres masses sont négligeables. La durée du cycle d'ouverture (et du cycle de fermeture) est de 2 min.



FIGURE 11.14 – Portes d'écluses et vérins

Lorsque le vérin déplace le vantail, le niveau d'eau du sas est identique à celui du bief. La porte est immergée sur la moitié de sa hauteur $h_e = \frac{H}{2}$.

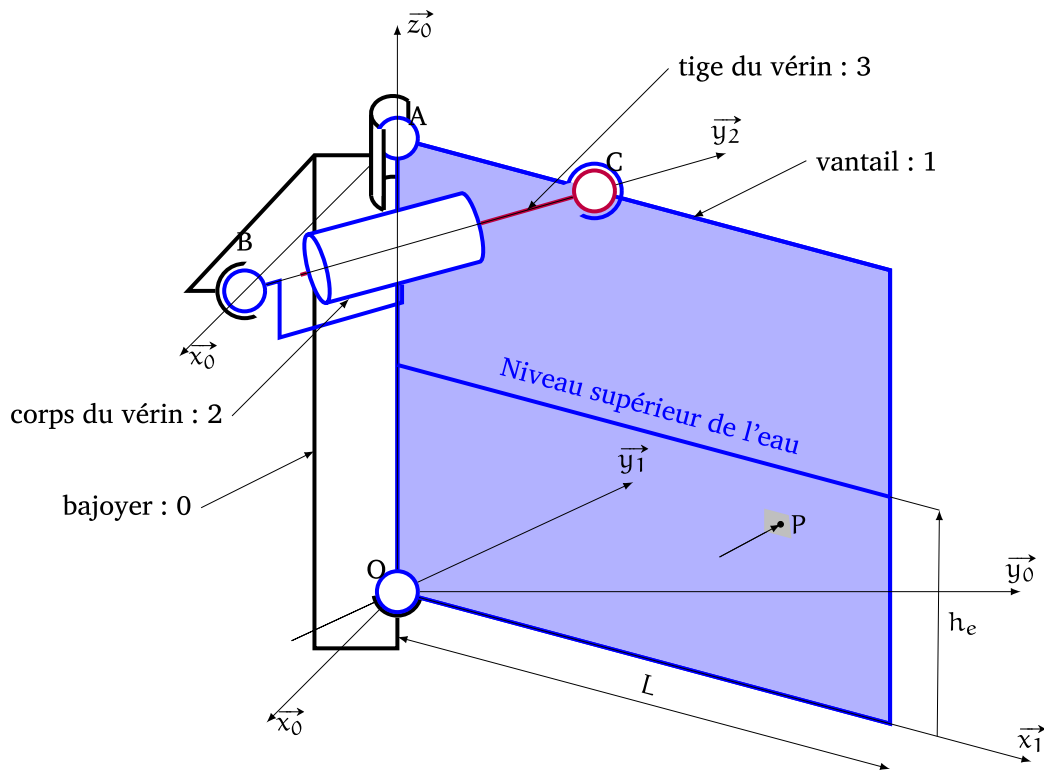


FIGURE 11.15 – Modèle cinématique

L'action de l'eau sur le vantail pendant le déplacement est modélisée, en tout point P de sa surface, par un effort élémentaire : $d\vec{F}_{eau \rightarrow v} = \pm p_r \cdot ds \cdot \vec{y}_1$ (le signe dépend du sens du déplacement) où p_r est une pression proportionnelle à la masse volumique de l'eau et au carré de la vitesse de déplacement : $p_r = k \cdot \rho \cdot V_{P \in 1/0}^2$.

On note, p_v la pression dans le vérin hydraulique et S_u la section utile du vérin.

Le repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bajoyer. Le repère $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$ est lié au vantail. L'axe (B, \vec{y}_2) est celui de la tige du vérin.

On note : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$; $(\vec{y}_0, \vec{y}_2) = \beta$; $\vec{OA} = H \cdot \vec{z}_0$; $\vec{BC} = \lambda \cdot \vec{y}_2$; $\vec{AC} = a \cdot \vec{x}_1$; $\vec{AB} = b \cdot \vec{x}_0$, $\vec{OP} = x \cdot \vec{x}_1 + z \cdot \vec{z}_0$.

On se propose dans cette étude de déterminer la pression p_v dans le vérin afin de déplacer le vantail.

B. Étude

B.1. Modélisation

Q1. Tracer le graphe des liaisons du mécanisme complet constitué par le bajoyer, le corps du vérin, la tige du vérin et le vantail.

Q2. Préciser sur le graphe les actions mécaniques.

Q3. Préciser les différents torseurs d'action transmissibles par les liaisons.

B.2. Cinématique

La figure 11.16 représente une vue de dessus partielle d'un vantail et de son vérin.

Q4. Soit P un point du vantail de coordonnées $(x, 0, z)$ dans $(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$, exprimer sa vitesse par rapport au bajoyer $V_{P \in 1/0}$ en fonction de ω_1 .

B.3. Équilibre du vantail

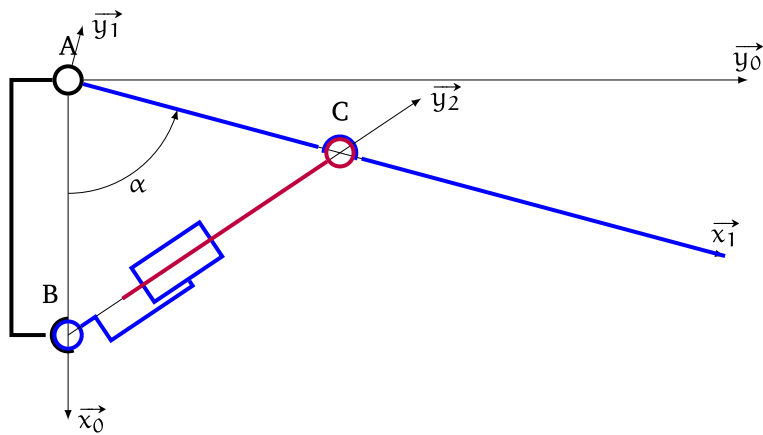


FIGURE 11.16 – Modèle cinématique simplifié

— Action de l'eau sur le vantail

Q5. Exprimer $d\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$ en fonction de ω_1 et x . Préciser l'élément de surface ds ainsi que les bornes d'intégration.

Q6. Déterminer $\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$ en fonction de ω_1 et des différents paramètres géométriques. Faire l'application numérique.

Q7. Déterminer $\vec{M}_{O, eau \rightarrow 1} = \int_S \vec{OP} \wedge d\vec{F}_{eau \rightarrow 1}$

Q8. Exprimer le torseur de l'action mécanique de l'eau sur le vantail en O.

Q9. Déterminer le point P du vantail pour lequel $\vec{M}_{P, eau \rightarrow 1} = \vec{0}$.

— Action du bajoyer sur le vantail

La liaison entre le bajoyer et le vantail est réalisée par deux liaisons en parallèle, une liaison sphérique et une liaison sphère cylindre.

On note L_O la liaison réalisée.

Q10. Déterminer le moment en O du torseur de l'action mécanique transmissible par la liaison sphère cylindre entre (0) et (1).

Q11. Déterminer le torseur résultant des deux liaisons entre le bajoyer (0) et le vantail (1) en O.

— Action du vérin sur le vantail

Q12. En isolant l'ensemble $\{2,3\}$, justifier que la résultante de l'action mécanique en A de la tige du vérin sur le vantail s'écrit : $\vec{R}_{3 \rightarrow 1} = F \cdot \vec{y}_2$.

Q13. Déterminer le moment en O de cette action $\vec{M}_{O, 3 \rightarrow 1}$.

Q14. Déterminer F en fonction de la pression p_v .

— Autres actions

Q15. Préciser les autres actions mécaniques extérieures sur le vantail et leur moment en O en projection sur \vec{z}_0 .

— Équilibre de 1

On considère que le vantail se déplace à vitesse constante dans le sens de la fermeture (α varie de 0° à 90°), le principe fondamental de la statique peut donc être utilisé.

On isole le vantail (1).

Q16. Énoncer le P.F.S.

Q17. Quelle équation doit-on écrire pour obtenir une relation entre l'action de l'eau et l'action du vérin sur le vantail, justifier.

Q18. Déterminer la relation donnant F en fonction de la vitesse de rotation ω_1 du vantail, en déduire p_v en fonction de ω_1 .