

6.10 Feuille de travaux dirigés n°6

Exercice 1 - Identification fréquentielle

Corrigé page 26

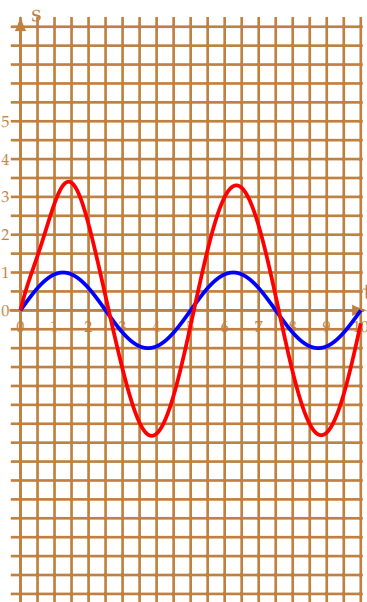
On souhaite déterminer la fonction de transfert d'un système par une étude fréquentielle. Pour cela, on a relevé la réponse temporelle de la sortie pour plusieurs fréquences (fig 6.11a à fig 6.11f) (0,2 Hz, 0,4 Hz, 0,6 Hz, 0,8 Hz, 1 Hz, 2 Hz).

Fréquence [Hz]	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3,5
Gain ([dB])	9,5							-20
Déphasage [°]	0,5							-179

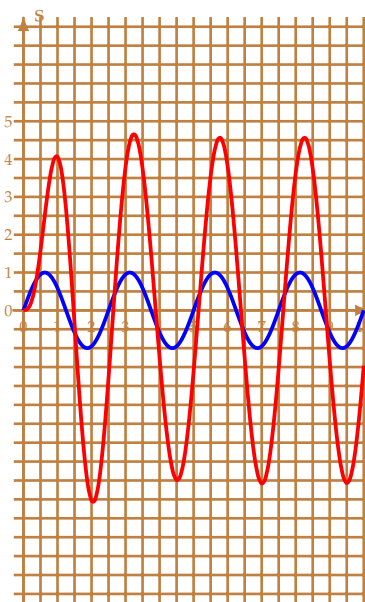
Tableau 6.1 – Relevés

Q1. Compléter le tableau 6.1 puis tracer les diagrammes de Bode de la fonction.

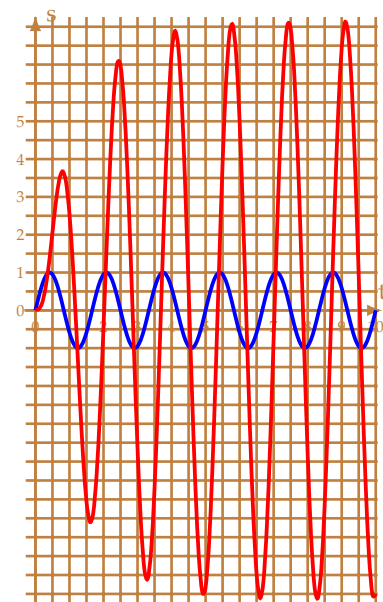
Q2. Proposer un modèle puis identifier les coefficients.



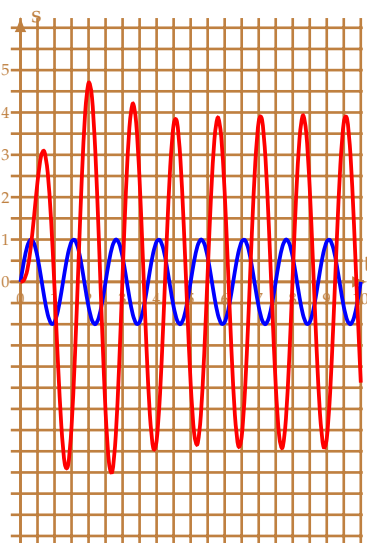
(a) 0,2 Hz



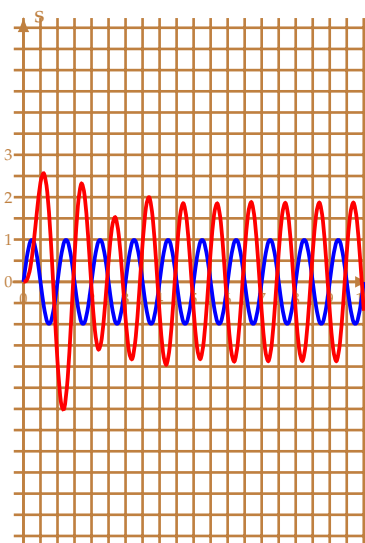
(b) 0,4 Hz



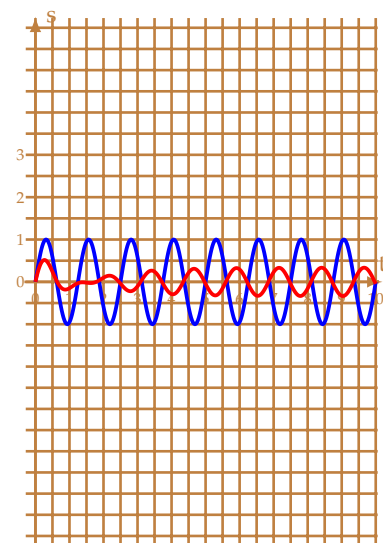
(c) 0,6 Hz



(d) 0,8 Hz



(e) 1 Hz



(f) 2 Hz

FIGURE 6.11 – Réponses fréquentielles

Exercice 2 - Automate d'exploration de l'hémostase

Extrait de CCP MP 2015

Corrigé page 26

A. Principe

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du diagnostic in vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase qui permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation.

Échantillon

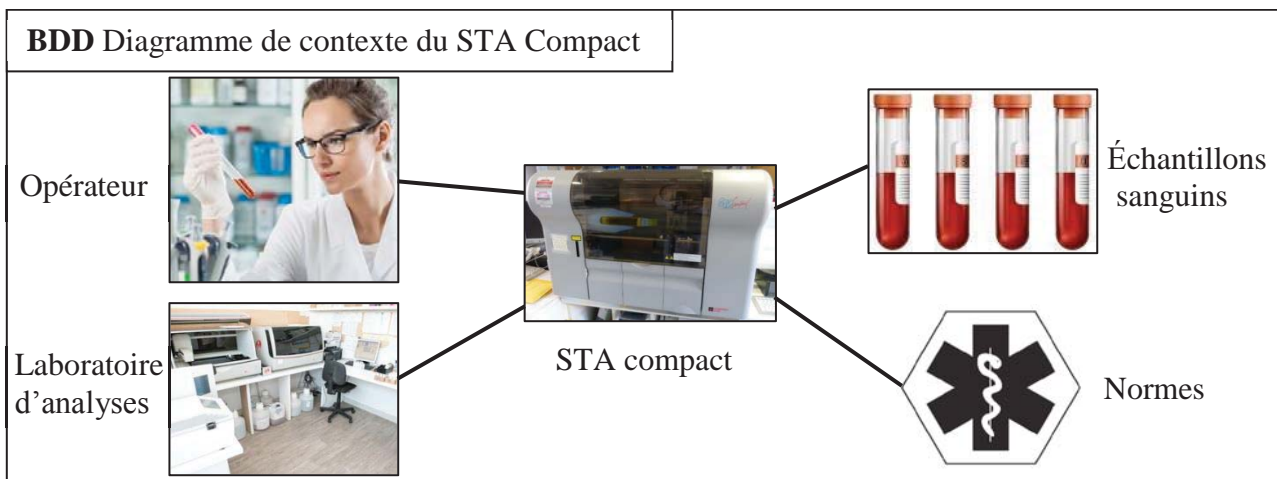


FIGURE 6.12 – Diagramme de contexte

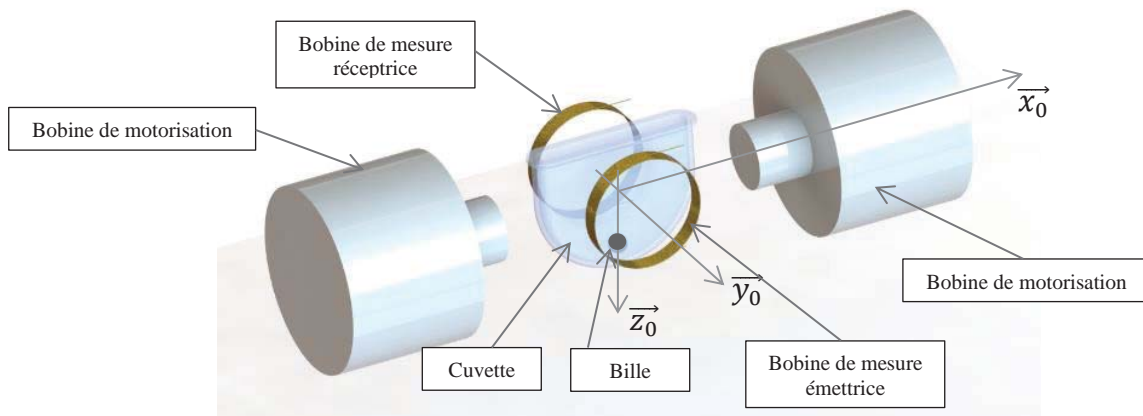


FIGURE 6.13 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

Un dispositif (cf. figure 6.13) permet de réaliser un test de chronométrie dont le principe est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille;
- l'ensemble est chauffé alors que la bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique variable induit par deux bobines de motorisation placées de part et d'autre de la tête de mesure;

- on mesure l'amplitude de l'oscillation par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Cette amplitude diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

B. Modélisation

Le schéma de calcul est donné ci-contre (figure 6.14). Hypothèses et données :

- la bille de masse m , de centre de masse G , de rayon $r = 1 \text{ mm}$, roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$;
- la position de la bille sur le rail est repérée par $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$;
- on note $f_v = 6 \cdot \pi \eta \cdot r$ le coefficient de frottement visqueux du sang sur la bille où η est le coefficient de viscosité du sang (exprimé en $\text{Pa} \cdot \text{s}$);
- on note $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{\text{bob}} \cdot t)$ l'action résultante des bobines de motorisation sur la bille.

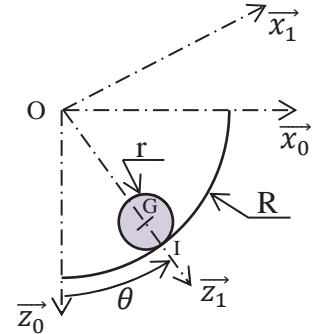


FIGURE 6.14 – Bille en contact avec le rail de la cuvette

Une étude dynamique a permis de déterminer l'équation différentielle non linéaire régissant la position de la bille :

$$\frac{7}{5} m \cdot (R - r) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f_v \cdot (R - r) \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) = F(t) \cdot \cos(\theta(t))$$

L'amplitude des oscillations étant petite, on peut considérer que $\sin(\theta) \approx \theta$ et $\cos(\theta) \approx 1$. On obtient ainsi l'équation linéaire suivante :

$$\frac{7}{5} m \cdot (R - r) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + f_v \cdot (R - r) \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot \theta(t) = F(t)$$

Q1. À partir de l'équation ci-dessus déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)}$.

Q2. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_s , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v , R , r , m et g .

On prendra pour la suite les valeurs numériques suivantes : $\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$; $\xi = 4 \cdot f_v$.

Q3. Déterminer le module et l'argument de $H(j \cdot \omega)$ dans un premier temps de manière littérale en fonction de ω_0 , K_s et f_v puis sous forme numérique.

Q4. Déterminer le module de $H(j \cdot \omega)$ en décibel.

Q5. Pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux : $f_{v1} = 0,005$ et $f_{v2} = 0,2$ que peut-on dire du coefficient d'amortissement? Déterminer, si elle existe, la pulsation de résonance ω_r et le coefficient de surtension Q_r . Faire l'application numérique.

Q6. Tracer pour les deux valeurs précédentes :

Q6a. les diagrammes asymptotiques de Bode de $H(j \cdot \omega)$ sur le diagramme d'amplitude et sur le diagramme de phase;

Q6b. l'allure du diagramme réel en amplitude et en phase;

Q6c. préciser les points particuliers sur les diagrammes.

Q7. La sollicitation des bobines est sinusoïdale : $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_{\text{bob}} \cdot t)$. Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation ω_{bob} pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement f_v .

Q8. Exprimer le rapport $\frac{|H(0)|}{|H(j \cdot \omega_0)|}$ en fonction de ξ , en déduire η en fonction de ξ .

Nous avons considéré jusqu'à présent que f_v est constant, en fait il augmente avec le temps (suffisamment lentement pour l'étude précédente soit malgré tout valide) et l'objectif du mécanisme est de mesurer cette évolution et d'en déduire le temps de coagulation.

Q9. Comment évolue l'amplitude des oscillations de la bille en fonction du temps ?

Exercice 3 - Chaudière à bois déchiqueté

Mines AADN 2010

Corrigé page 28

A. Présentation générale

Dans le cadre du « Grenelle de l'environnement » et de la mise en place de la « taxe carbone », l'avenir du chauffage est conditionné au fait que la biomasse est neutre en dégagement de CO_2 . HARGASSNER développe la technologie du chauffage au bois déchiqueté et aux granulés de bois dans le but de concilier un chauffage à la fois écologique et confortable d'utilisation. L'entreprise est devenue un leader en matière de technique innovante, de développement, de service, de qualité et de longévité dans le domaine du chauffage au bois.

L'étude porte sur la chaudière HSV 30, alimentée en bois déchiqueté, qui développe une puissance de chauffe de 25 à 35 kW.

B. Étude de la fonction « Chauffer l'eau »

B.1. Modélisation

Par l'intermédiaire d'un échangeur thermique, la combustion des granules de bois permet de chauffer de l'eau.

L'étude porte sur la montée en température de l'eau qui sert à chauffer les pièces au travers de radiateurs. Cette température est obtenue à partir d'une puissance calorifique fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire de la chaudière.

On considère que :

- $p(t)$ est la puissance calorifique en watt fournie par le bois brûlé au niveau du foyer réfractaire. Elle permet la montée en température du bâti de la chaudière ;
- l'air situé dans la chambre de combustion permet de monter à la température $\theta_e(t)$ l'eau située dans l'échangeur ;
- l'eau chaude, au travers des radiateurs permet de chauffer les pièces à une température $\theta_{ext}(t)$.

On note :

- $\theta_b(t)$ la température du bâti de la chaudière ;
- m_b la masse du bâti à monter en température : $m_b = 200 \text{ kg}$;
- c_b la capacité calorifique massique du bâti : $c_b = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_a(t)$ la température de l'air dans la chambre de combustion ;
- m_a la masse de l'air à monter en température : $m_a = 2 \text{ kg}$;
- c_a la capacité calorifique massique de l'air : $c_a = 700 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- $\theta_e(t)$ la température de l'eau dans l'échangeur et les radiateurs : $m_e = 50 \text{ kg}$;
- c_e la capacité calorifique massique de l'eau : $c_e = 4000 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- θ_{ext} la température ambiante des pièces à chauffer.

Les principes de conservation de l'énergie conduit à une modélisation par les équations différentielles suivantes :

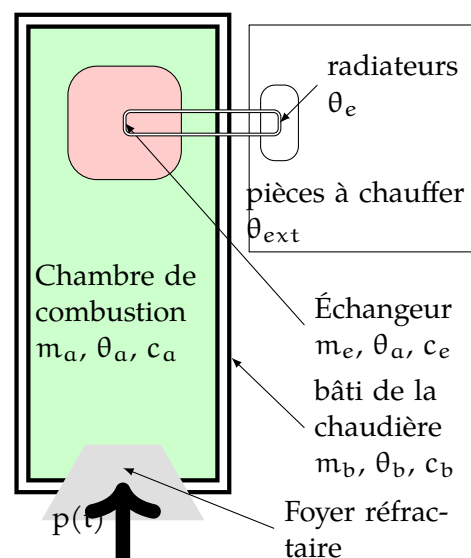


FIGURE 6.15 – Chaudière à bois

$$\begin{aligned} - m_b c_b \frac{d\theta_b(t)}{dt} + K_{ab} (\theta_b(t) - \theta_a(t)) &= p(t); \\ - m_a c_a \frac{d\theta_a(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_a(t) - \theta_e(t)) &= K_{ab} [\theta_b(t) - \theta_a(t)]; \\ - m_e c_e \frac{d\theta_e(t)}{dt} + K_{ae} (\theta_e(t) - \theta_{ext}(t)) &= K_{ae} [\theta_a(t) - \theta_e(t)]. \end{aligned}$$

Avec :

- K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion; K_{ab} la conductance thermique entre le bâti et l'air dans la chambre de combustion : $K_{ab} = 40 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- K_{ae} la conductance thermique entre l'air et l'eau au travers de l'échangeur ou des radiateurs : $K_{ae} = 400 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

On suppose que le corps de chauffe est parfaitement isolé de l'extérieur.

Les transformées de Laplace sont notées : $\mathcal{L} [\theta_i(t)] = T_i(p)$ et $\mathcal{L} [p(t)] = P(p)$.

Q1. En supposant que les conditions initiales sont nulles (conditions de Heaviside), donner dans le domaine de Laplace, la transformée des équations différentielles précédentes.

Q2. Exprimer $T_b(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $P(p)$ en faisant apparaître les variables m_b , c_b et K_{ab} et mettre $T_b(p)$ sous la forme $T_b(p) = H_1(p)T_a(p) + H_2(p)P(p)$.

Q3. Exprimer $T_a(p)$ en fonction de $T_e(p)$ et de $T_b(p)$ en faisant apparaître les variables m_a , c_a , K_{ae} et K_{ab} puis mettre $T_a(p)$ sous la forme $T_a(p) = H_3(p)T_e(p) + H_4(p)T_b(p)$.

Q4. Exprimer $T_e(p)$ en fonction de $T_a(p)$ et de $T_{ext}(p)$

Finalement, le schéma-bloc global de la chaudière peut se mettre sous la forme de la figure 6.16.

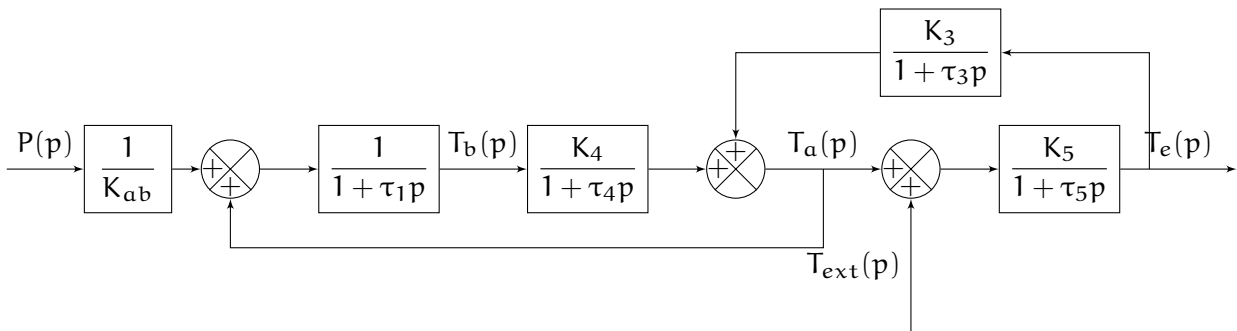


FIGURE 6.16 – Schéma bloc global

Q5. Par manipulations successives du schéma-bloc précédent, exprimer $\frac{T_e(p)}{P(p)}$ en considérant que $T_{ext}(p) = 0$.

Q6. Mettre cette expression sous la forme canonique la plus simple possible.

Compte tenu des valeurs numériques, la fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{T_e(p)}{P(p)} \approx \frac{0,025}{10 + 35\,000 \cdot p + 1,4 \times 10^7 \cdot p^2 + 4,8 \times 10^7 \cdot p^3}$$

La figure 6.17 présente les diagrammes de Bode de la fonction de transfert de $H(p)$.

Suite à la simplification des équations de la thermodynamique, le système peut se modéliser par la fonction de transfert simplifiée $H_s(p)$ suivante :

$$H_s(p) = \frac{T_e(p)}{P(p)} = \frac{1}{400 (1 + 450 \cdot p) (1 + 3\,050 \cdot p)}$$

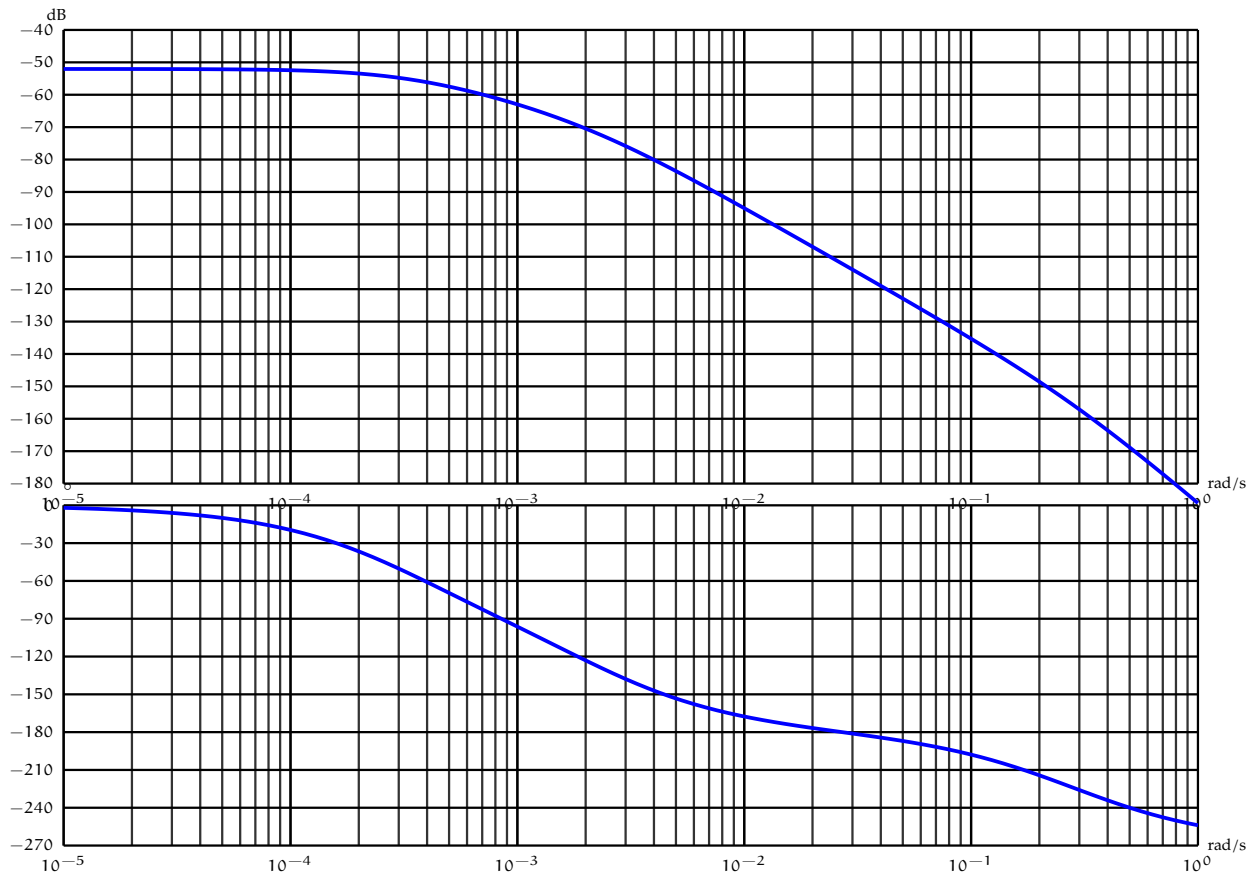


FIGURE 6.17 – Diagrammes de Bode de $H(p)$

B.2. Validation du modèle simplifié

- Q7.** Déterminer la fonction de transfert complexe $H_s(j \cdot \omega)$ puis le module en décibel $H_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log(|H_s(j \cdot \omega)|)$ et l'argument $\Phi(\omega) = \arg(H_s(j \cdot \omega))$.
- Q8.** Tracer sur les diagramme de Bode de $H(p)$, les diagrammes asymptotiques de Bode du modèle simplifié.
- Q9.** Compléter le tracé avec le tracé du module et de l'argument.
- Q10.** Justifier que le modèle simplifié est valide.