7.8 Feuille de travaux dirigés n°7

Exercice 1 - Éolienne

Corrigé page 31

Soit l'éolienne de la figure 7.22.
La nacelle (1) pivote autour du mas (0) suivant l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$.
L'hélice (2) pivote autour de l'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$. On note :

- $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$ le paramètre de rotation entre le repère associé à la nacelle et le mas,
- $\beta = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$ le paramètre de rotation entre l'hélice et la nacelle,
- $\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{x_1}$,
- B le point à l'extrémité de la pale $\overrightarrow{AB} = b \cdot \overrightarrow{z_2}$ avec $b = 2{,}3\,\mathrm{m}$.

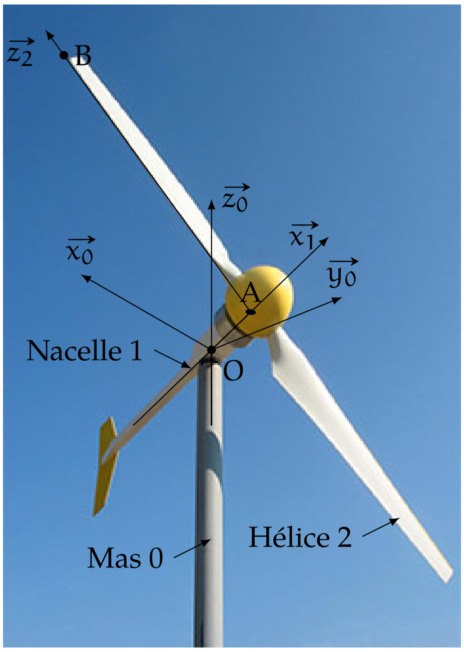


FIGURE 7.22 – Éolienne

Q1. Tracer les deux figures de changement de base.
Q2. Déterminer la vitesse du point A et du point B par rapport au repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$.
Q3. Écrire les deux torseurs cinématiques $\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$ et $\left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$ en A et en O puis $\left\{\mathcal{V}_{2/0}\right\}$ en A et en O.
Q4. Déterminer l'accélération de ces deux points par rapport au repère R_0.

L'éolienne est orientée dans le vent et ne bouge pas, la vitesse de rotation de l'hélice est régulée et maintenue constante.

Q5. Donner alors l'accélération de ces deux points.
Q6. La vitesse maximale admissible au bout de la pale est $V_{max} = 70\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, en déduire $\omega_{21} = \dfrac{d\,\beta(t)}{dt}$ pour θ constant.

Exercice 2 - Robot Scara

Corrigé page 32

Présentation

Le robot SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm) est l'un des robots les plus utilisés en industrie. Il est très souvent utilisé pour réaliser des assemblages (figure 7.23).

La structure de base des robots SCARA est à deux degrés de liberté, deux rotations d'axes parallèles, l'une entre le carter (0) et le bras (1) autour de $(O, \overrightarrow{z_0})$, et une autre entre le bras et l'avant-bras (2) autour de l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$.

À ces deux rotations s'ajoutent une rotation autour de l'axe $(B, \overrightarrow{z_0})$ et une translation de même direction permettant des opérations d'assemblage et de vissage de la pince (3).

Données :

- $\overrightarrow{OA} = a \cdot \overrightarrow{x_1}$ avec $a = 50\,\mathrm{cm}$;
- $\overrightarrow{AB} = b \cdot \overrightarrow{x_2} + c \cdot \overrightarrow{z_0}$ avec $b = 30\,\mathrm{cm}$ et $c = 5\,\mathrm{cm}$;
- $\overrightarrow{BP} = -\lambda \cdot \overrightarrow{z_0}$ avec $5\,\mathrm{cm} \leqslant \lambda \leqslant 30\,\mathrm{cm}$;
- $\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1})$ avec $-90° \leqslant \alpha \leqslant 90°$
- $\beta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2})$ avec $-135° \leqslant \beta \leqslant 135°$

Q1. Tracer les figures de changement de base.
Q2. Déterminer $\overrightarrow{OP}$ en fonction de a, b, α, β et λ.
Q3. Déterminer α et β en fonction de P_x et P_y.

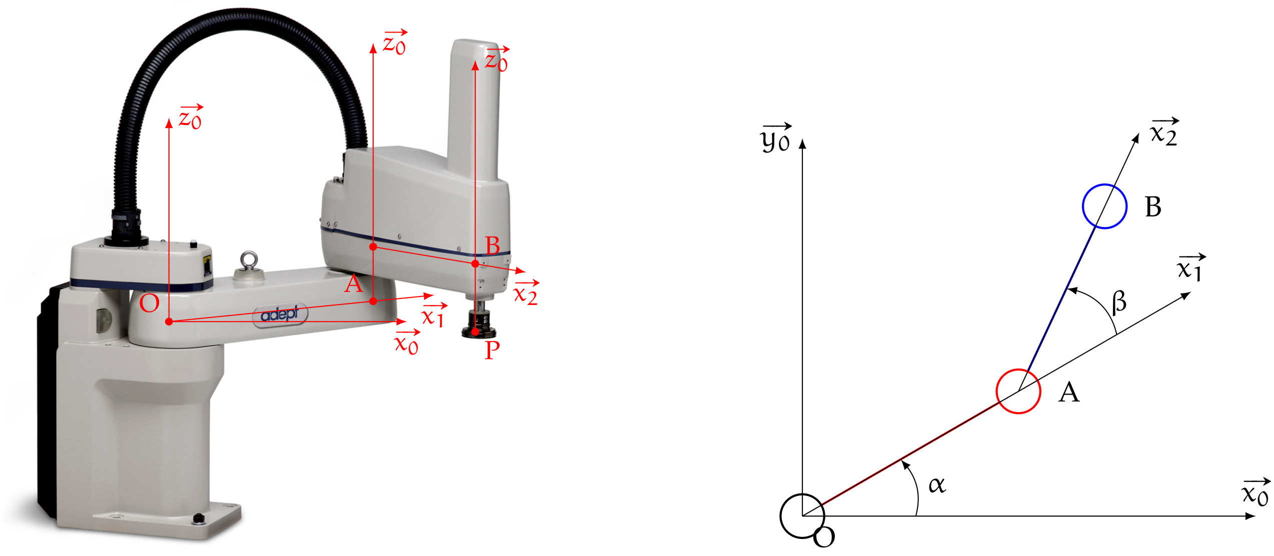


FIGURE 7.23 – Robot SCARA

Q4. Tracer le domaine du plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$ dans lequel le robot peut saisir et manipuler des pièces. Différencier les zones pour lesquelles il n'existe qu'une combinaison de α et β pour atteindre un point donné et les autres.

Q5. Déterminer $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$, $\overrightarrow{V_{P\in 3/0}}$

Q6. Déterminer $\overrightarrow{\Gamma_{A\in 1/0}}$, $\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}$, $\overrightarrow{\Gamma_{P\in 3/0}}$

Exercice 3 - Étude d'une voiture en virage

Corrigé page 33

Présentation

Soit une voiture dans un virage plat.

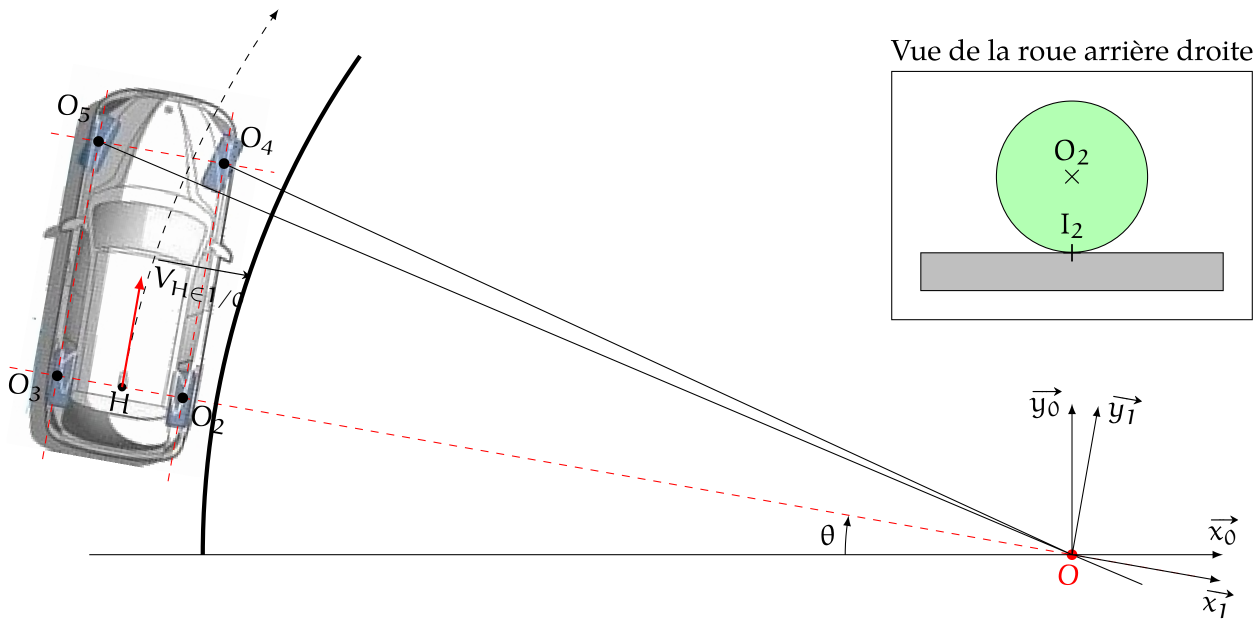


FIGURE 7.24 – Trajectoire circulaire

On note :

— $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ le repère associé au sol (0).

- O : le centre de la trajectoire circulaire.
- $\mathcal{R}_1 = (H, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ le repère associé au véhicule (1) avec $OH = R$ et H le milieu de O_2O_3, les centres des deux roues arrières.
- $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta$ et $\omega_{10} = \dfrac{d\theta}{dt}$
- O_2, O_3, O_4, O_5, respectivement les centres des roues arrière droite (2) , gauche (3) , roue avant droite (4) et gauche (5) avec $\overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{O_4O_5} = -b \cdot \overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{O_2O_4} = \overrightarrow{O_3O_5} = a \cdot \overrightarrow{y_1}$.
- ω_{21},ω_{31},ω_{41},ω_{51}, les vitesses de rotation des roues par rapport à leur axe de rotation par rapport au véhicule.
- I_2, I_3, I_4, I_5, le point de contact avec le sol de chaque roue. On suppose que les roues roulent sans glisser en I_i. On pose r le rayon des roues.
- On note G le centre d'inertie de la voiture avec $\overrightarrow{HG} = \dfrac{a}{2} \cdot \overrightarrow{y_1}$.
- Les deux roues motrices sont les deux roues avant, les deux roues arrière sont libres en rotation.

Q1. Justifier le tracé de la vitesse du point H du véhicule par rapport au sol $\overrightarrow{V_{H\in 1/0}}$ puis la déterminer.

On pose $\overrightarrow{x_4} = \dfrac{\overrightarrow{O_4O}}{\left\|\overrightarrow{O_4O}\right\|}$ et $\overrightarrow{y_4} = \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_4}$ le repère associé à la roue (4) $\big($respectivement $\overrightarrow{x_5} = \dfrac{\overrightarrow{O_5O}}{\left\|\overrightarrow{O_5O}\right\|}$ et $\overrightarrow{y_5} = \overrightarrow{z_0} \wedge \overrightarrow{x_5}\big)$.

Q2. Déterminer le torseur cinématique du véhicule par rapport au sol $\left\{\mathcal{V}_{1/0}\right\}$ en H. En déduire $\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$. Montrer que les deux dernières vitesses s'écrivent $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}} = \ell_4 \cdot \overrightarrow{y_4}$ et $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}} = \ell_5 \cdot \overrightarrow{y_5}$.

Q3. Tracer à l'échelle $\overrightarrow{V_{O_2\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_3\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_4\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{O_5\in 1/0}}$ sur le schéma.

Q4. Donner les torseurs de chaque roue par rapport au véhicule puis par rapport au sol.

Q5. Déterminer $\overrightarrow{V_{I_2\in 2/0}}$, $\overrightarrow{V_{I_3\in 3/0}}$, $\overrightarrow{V_{I_4\in 4/0}}$ et $\overrightarrow{V_{I_5\in 2/0}}$.

Q6. Rappeler les conditions de non-glissement en I_2, I_3, I_4 et I_5 en déduire ω_{21}, ω_{31}, ω_{41} et ω_{51}.

Exercice 4 - Manege Pieuvre

Corrigé page 35

Présentation

Le manège pieuvre est un classique des foires. Il procure des sensations par son mouvement épicycloïdal qui produit de fortes accélérations. L'objectif de l'exercice consiste à déterminer les caractéristiques géométriques (longueurs des bras) et cinématiques (vitesses angulaires des bras) afin de respecter l'extrait de cahier des charges donné (table 7.1).

Soit O le centre de la rotation principale d'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ entre le carter et les trois bras (1) à 120°. Le repère $R_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ est lié au carter (0). La nacelle (2) est en rotation en rotation par rapport au bras (1) autour de l'axe $(A, \overrightarrow{z_0})$. Le repère $R_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est associé au bras (1), le repère $R_2 = (A, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ est associé à la nacelle (2).

Fonction	Critères	Niveau
Assurer des sensations fortes en toute sécurité	Vitesse maximale	40 km/h
	Accélération maximale	1,5 g
	Accélération minimale	0,5 g

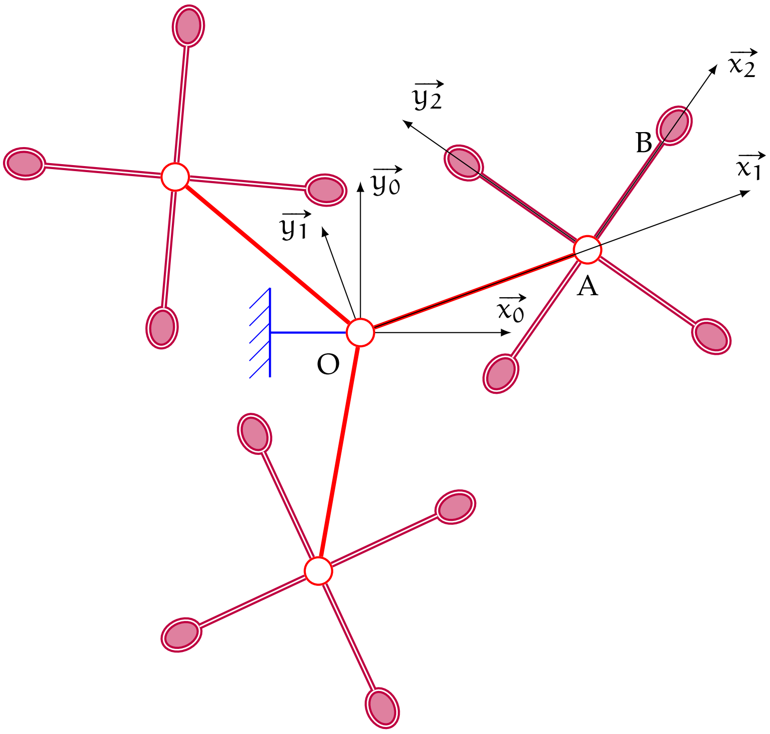
TABLE 7.1 – Extrait du cahier des charges

Q1. Tracer les figures de changement de base.

Q2. Déterminer le vecteur $\overrightarrow{OB}$.

Q3. Déterminer les vitesses : $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}}$, $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$ puis $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ sous la forme la plus concise possible en fonction de ω_{10}, ω_{21} , R_1 et R_2.

FIGURE 7.25 – Manège pieuvre



— $\overrightarrow{OA} = R_1 \cdot \overrightarrow{x_1}$,
— $\overrightarrow{AB} = R_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$,
— $(\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}) = (\overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_1}) = \theta$,
— $(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = (\overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{y_2}) = \alpha$,

On note aussi :

— $\omega_{10} = \dfrac{d\,\theta}{dt} = \dot{\theta}$,
— $\omega_{21} = \dfrac{d\,\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$,

pendant la phase de régime permanent, on considère que ω_{10} est constant. À l'instant initial, les points O, A, B sont alignés.

FIGURE 7.26 – Manège pieuvre

Nous avons 4 grandeurs à déterminer (R_1, R_2, ω_{10} et ω_{21}) pour trois critères dans le cahier des charges. Il n'y a pas de solution unique. On suppose donc une condition supplémentaire, à savoir que les vitesses de rotations sont telles que $\omega_{21} = -2 \cdot \omega_{10}$.

Q4. Pour quelle valeur de α, $\|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|$ la vitesse est-elle maximale ? Préciser alors l'expression littérale de $V_{max} = \|\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}\|_{maxi}$.

Q5. Déterminer, $\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}$, l'accélération du point B par rapport au repère $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ pendant la phase de régime permanent de la manière la plus succincte possible.

Q6. Pour quelle valeur de α,

Q6a. l'accélération $\|\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\|$ est-elle maximale ? Préciser alors l'expression littérale.

Q6b. l'accélération $\|\overrightarrow{\Gamma_{B\in 2/0}}\|$ est-elle minimale ? Préciser alors l'expression littérale

Q7. Déterminer alors les valeurs numériques de R_1, R_2 et ω_{10} qui permettent de respecter le cahier des charges.