

Étude temporelle des systèmes linéaires

5.1 Systèmes du 1^{er} ordre

5.1.1 Définition

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \tau : \text{constante de temps} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

5.1.2 Fonction de transfert

On pose : $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside. En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$$

On en déduit la fonction de transfert sous sa forme canonique et le schéma-bloc d'un système du premier ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \quad \begin{array}{c} E(p) \rightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \tau \cdot p}} \rightarrow S(p) \end{array}$$

5.1.3 Étude temporelle - Réponse à un échelon

On se propose d'étudier la réponse temporelle de la sortie $s(t)$ pour une entrée de type échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

Pour déterminer la réponse temporelle de la sortie $s(t)$, il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle. On peut pour cela, soit utiliser les outils mathématiques classiques, soit utiliser les propriétés de la transformée de Laplace.

Pour résoudre complètement il est nécessaire de préciser les conditions initiales, nous les supposons nulles (conditions de Heaviside).

La résolution ne pose pas de problème, on connaît la forme de l'équation différentielle à résoudre,

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

et la solution est, pour un système partant du repos, de la forme :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Nous allons retrouver ce résultat à partir de la transformation de Laplace.

On détermine dans un premier temps la sortie dans le domaine symbolique :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \quad \text{avec} \quad e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau \cdot p} \quad (\text{décomposition en fractions simples})$$

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0}{p} - \frac{K \cdot E_0 \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p} \quad (\text{par identification})$$

À partir du tableau des transformées page 37;

$$\frac{K \cdot E_0}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K \cdot E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$$

$$\frac{K \cdot E_0 \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K \cdot E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \mathcal{H}(t)$$

On retrouve bien la réponse temporelle (figure 5.1).

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \mathcal{H}(t)$$

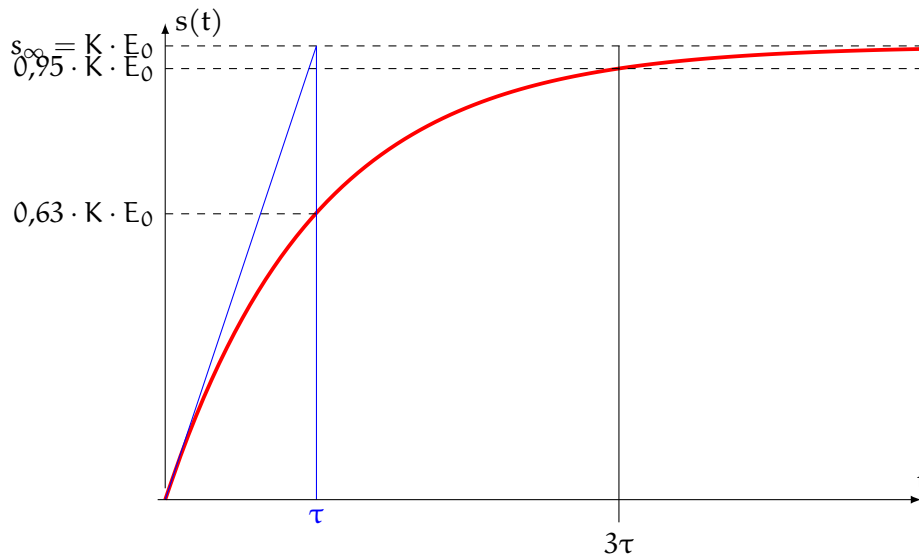


FIGURE 5.1 – Caractéristiques graphiques d'un 1^{er} ordre

a) Étude et propriétés de $s(t)$

L'étude de cette fonction ne pose aucun problème particulier mais nous allons utiliser les outils de la transformation de Laplace pour retrouver quelques propriétés.

Asymptote finale : à partir du théorème de la valeur finale¹, nous allons vérifier que la réponse

1. Le théorème de la valeur finale n'est utilisable que si la fonction est convergente.

possède une asymptote horizontale. Le théorème de la valeur finale s'écrit :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= K \cdot E_0\end{aligned}$$

La sortie tend asymptotiquement vers une valeur finie $K \cdot E_0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Valeur initiale : le théorème de la valeur initiale appliqué à $s(t)$ permet d'obtenir la valeur à l'instant $t = 0$ de la sortie.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p) \\ \lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) \\ \lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= 0\end{aligned}$$

Tangente à l'origine : pour déterminer la tangente à l'origine, il faut déterminer la dérivée de $s(t)$ pour $t = 0$. On peut utiliser le théorème de la valeur initiale appliqué à la dérivée pour obtenir cette valeur.

Nous savons que pour une fonction temporelle $f(t)$ dont la transformée de Laplace est $F(p)$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= p \cdot F(p) - f(0^+) \\ \mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= p \cdot F(p) \quad \text{si les conditions initiales sont nulles.}\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la valeur initiale à $\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p^2 \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) = \frac{K}{\tau} \cdot E_0$$

La pente à l'origine est non nulle et égale à $\frac{K \cdot E_0}{\tau} = \frac{s_\infty}{\tau}$. On constate que la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale ($K \cdot E_0$) au bout du temps τ (voir figure 5.2a).

Temps de réponse : on appelle temps de réponse à 5% ($T_{5\%}$), le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à $\pm 5\%$ près soit :

$$\begin{aligned}\frac{s(\infty) - s(T_{5\%})}{s(\infty)} &= 0,05 \\ \frac{K \cdot E_0 - K \cdot E_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_{5\%}}{\tau}}\right)}{K \cdot E_0} &= 0,05 \\ e^{-\frac{T_{5\%}}{\tau}} &= 0,05\end{aligned}$$

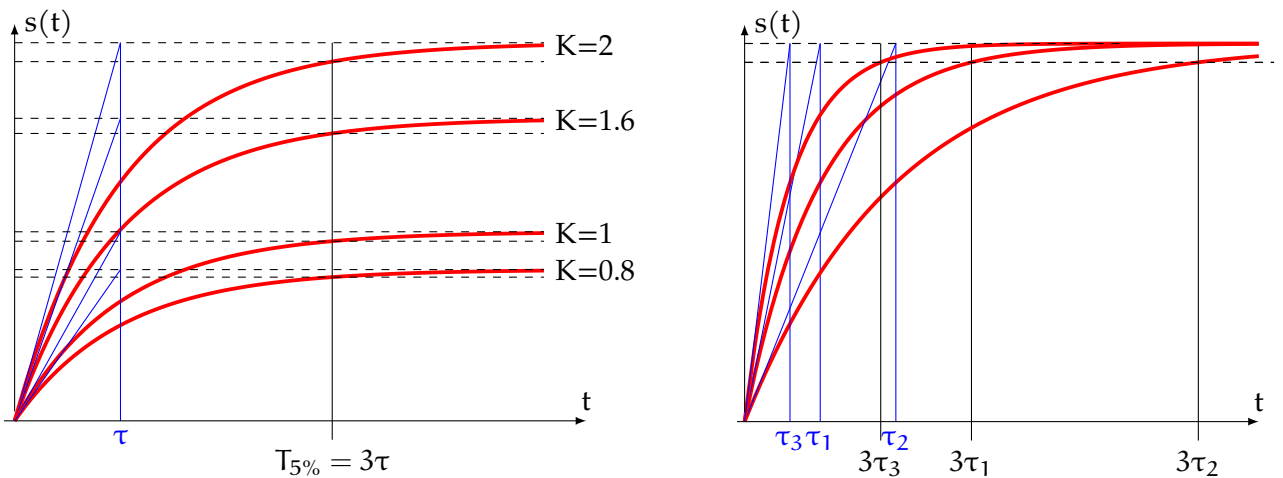
On en déduit

$$T_{5\%} \approx 3 \cdot \tau$$

On note que le temps de réponse ne dépend pas de la consigne d'entrée ni du gain mais uniquement de la constante de temps τ , plus la constante de temps est importante, plus le temps

de réponse est important.

On retrouve sur les figures 5.1 et 5.2 les différentes caractéristiques de la réponse temporelle à un échelon d'un système du 1^{er} ordre.



(a) Réponse à un échelon unitaire d'un 1^{er} ordre pour différentes valeurs du gain K

(b) Réponse à un échelon d'un 1^{er} ordre pour différentes valeurs de la constante de temps τ

FIGURE 5.2 – Réponse d'un système du 1^{er} ordre

5.1.4 Réponse à une impulsion de Dirac

Pour une impulsion de Dirac (figure 5.3) : $e(t) = \delta(t)$ alors

$$S(p) = H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \Rightarrow s(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Remarque : compte tenu de la discontinuité de l'impulsion de Dirac, le théorème de la valeur initiale n'est pas applicable.

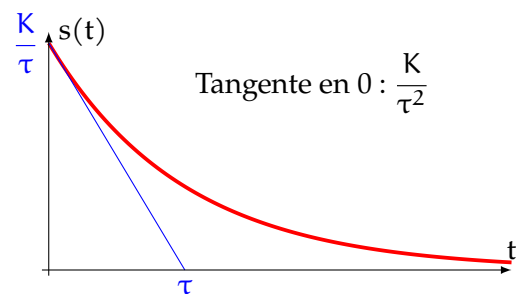


FIGURE 5.3 – Réponse à une impulsion de Dirac

5.1.5 Réponse à une rampe

Réponse à une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$ (figure 5.4) alors

$$S(p) = H_1(p) \cdot E(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{a}{p^2}$$

$$s(t) = K \cdot a \cdot \left(t - \tau \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right)$$

L'asymptote de pente $K \cdot a$ coupe l'axe des abscisses en $(\tau, 0)$.

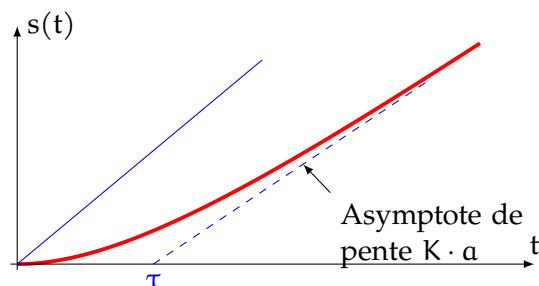


FIGURE 5.4 – Réponse à une rampe de pente a

5.2 Systèmes du 2^d ordre

5.2.1 Définition

Un système du second ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre :

$$a_2 \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) = b_0 \cdot e(t)$$

Lorsque tous les coefficients sont de même signe, on préfère l'écrire sous sa forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega_n > 0 : \text{pulsation propre, en rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \xi > 0 : \text{facteur d'amortissement, sans dimension} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

Remarque : en physique, vous utiliserez une autre représentation canonique :

$$\frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q \cdot \omega_n} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega_n > 0 : \text{pulsation propre} \\ Q = \frac{1}{2 \cdot \xi} : \text{facteur de qualité, sans dimension} \\ K : \text{gain statique} \end{array}$$

5.2.2 Fonction de transfert

On pose : $e(t) \xrightarrow{L} E(p)$ et $s(t) \xrightarrow{L} S(p)$. On se place dans les conditions de Heaviside.

En appliquant la transformation de Laplace à l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{\omega_n^2} \cdot S(p) + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p \cdot S(p) + S(p) &= K \cdot E(p) \\ \left(\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + 1 \right) \cdot S(p) &= K \cdot E(p) \end{aligned}$$

On en déduit la fonction de transfert sous sa forme canonique et le schéma-bloc d'un système du second ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \quad \begin{array}{c} E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}} \longrightarrow S(p) \end{array}$$

Le dénominateur de la fonction de transfert admet soit des racines réelles, soit une racine réelle double, soit deux racines complexes conjuguées.

$$\Delta = \frac{4 \cdot \xi^2}{\omega_n^2} - \frac{4}{\omega_n^2} = \frac{4}{\omega_n^2} \cdot (\xi^2 - 1)$$

On constate que le signe de Δ ne dépend que de ξ :

Cas $\xi > 1$ alors $\Delta > 0$: le dénominateur admet alors deux racines réelles,

$$r_1 = \omega_n \cdot \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_n \cdot \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

On pose :

$$\tau_1 = -\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\omega_n \cdot (-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \quad \text{et} \quad \tau_2 = -\frac{1}{r_2} = -\frac{1}{\omega_n \cdot (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

soit :

$$\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \text{et} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}}$$

Il est alors préférable d'écrire la fonction de transfert sous la forme d'un produit de deux fonctions du premier ordre :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Cas $\xi = 1$ alors $\Delta = 0$: le dénominateur admet alors une racine réelle double,

$$r = -\omega_n$$

La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme :

$$H(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{p}{\omega_n}\right)^2} = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

Cas $0 < \xi < 1$ alors $\Delta < 0$: le dénominateur admet alors deux racines complexes conjuguées.

$$r_1 = \omega_n \cdot (-\xi - j \cdot \sqrt{1 - \xi^2}) \quad \text{et} \quad r_2 = \omega_n \cdot (-\xi + j \cdot \sqrt{1 - \xi^2})$$

Il est d'usage de laisser la fonction de transfert dans ce cas, sous la forme d'un polynôme du second degré afin de ne pas faire apparaître les termes imaginaires :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

5.2.3 Réponse temporelle à une entrée en échelon

L'allure de la réponse temporelle va donc dépendre du coefficient d'amortissement ξ ,

Soit $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$ avec $\mathcal{H}(t)$ la fonction de Heaviside alors :

$$S(t) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p}$$

On considère que $\xi > 0$ et $\omega_n > 0$.

Valeur finale

La valeur finale ne dépend que du gain statique K et de l'amplitude de l'échelon.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$$

Valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = 0$$

Tangente à l'origine

La courbe de réponse pour une entrée en échelon débute en 0, avec une tangente horizontale.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(p^2 \cdot \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{s}(t) = 0$$

Les valeurs initiale et finale ne dépendent pas de ξ ni de ω_n si $\xi > 0$ et $\omega_n > 0$. L'allure de la réponse temporelle dépend par contre de la nature des racines du dénominateur de la fonction de transfert et de la nature des racines réelles ou complexes du dénominateur.

a) Cas $\xi > 1$: deux racines réelles

La fonction de transfert a donc la forme suivante :

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La décomposition en fraction simple s'écrit :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} - \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 \cdot p} \right)$$

Du tableau des transformées inverses, on déduit :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

On note sur la figure 5.5 :

- l'influence de $\xi > 1$, plus $\xi = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2 \cdot \sqrt{\tau_1 \cdot \tau_2}}$ est grand, plus le temps de réponse est important pour ω_n constant;
- que la tangente à l'origine est horizontale et la réponse ne présente pas d'oscillation.

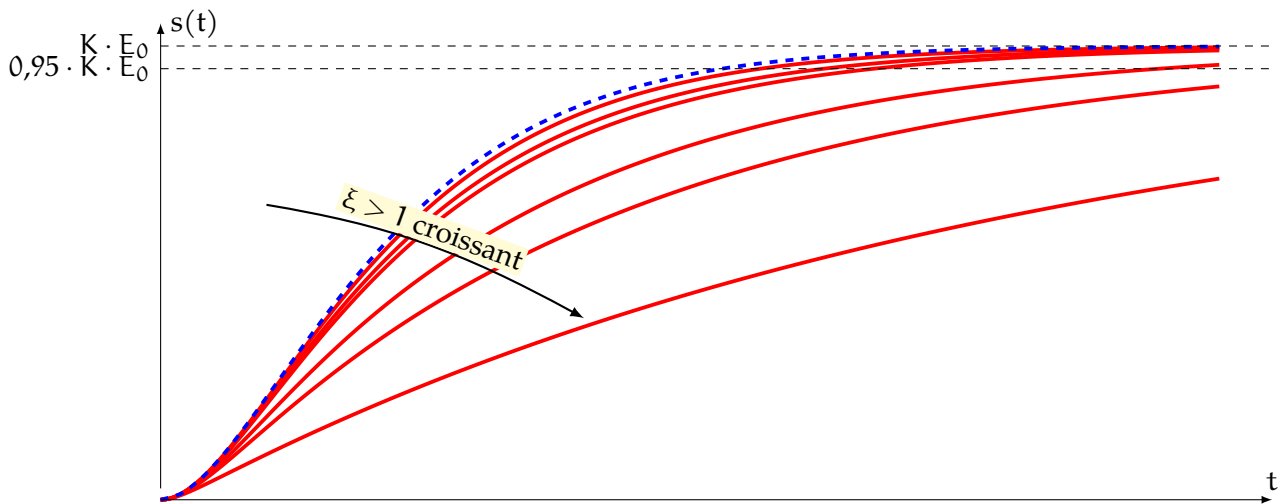


FIGURE 5.5 – Réponse temporelle d'un second ordre avec ω_n constant pour $\xi > 1$ (tracés continus) et $\xi = 1$ (tracé en pointillé) à une entrée en échelon

b) cas $\xi = 1$: une racine double

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)^2} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Décomposition en fraction simple :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{(1 + \tau \cdot p)^2} - \frac{\tau}{(1 + \tau \cdot p)} \right)$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{t + \tau}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

en revenant à ξ et ω_n , la réponse temporelle s'écrit :

$$s(t) = K \cdot (1 - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n \cdot t}) \cdot \mathcal{H}(t)$$

c) Cas $0 < \xi < 1$: deux racines complexes conjuguées

La fonction de transfert s'écrit :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} \cdot \frac{E_0}{p}$$

La réponse temporelle s'écrit alors :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \varphi) \right) \cdot \mathcal{H}(t) \quad \text{avec} \quad \varphi = \arccos \xi$$

On pose en général ω_p la pseudo pulsation avec

$$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

La réponse temporelle devient :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin(\omega_p \cdot t + \varphi) \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$s(t) = K \cdot E_0 \left(1 - \left(\cos(\omega_p \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_p \cdot t) \right) \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \right) \cdot \mathcal{H}(t)$$

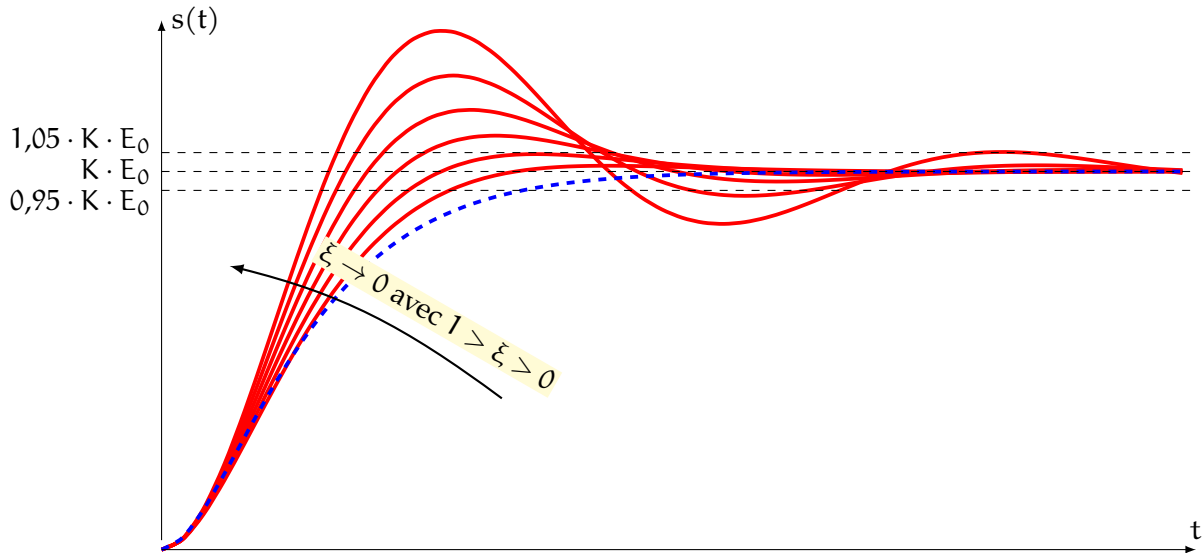


FIGURE 5.6 – Réponse temporelle d’un second ordre avec ω_n constant pour $0 < \xi < 1$ (tracés continus) et $\xi = 1$ (tracé en pointillé) à une entrée en échelon

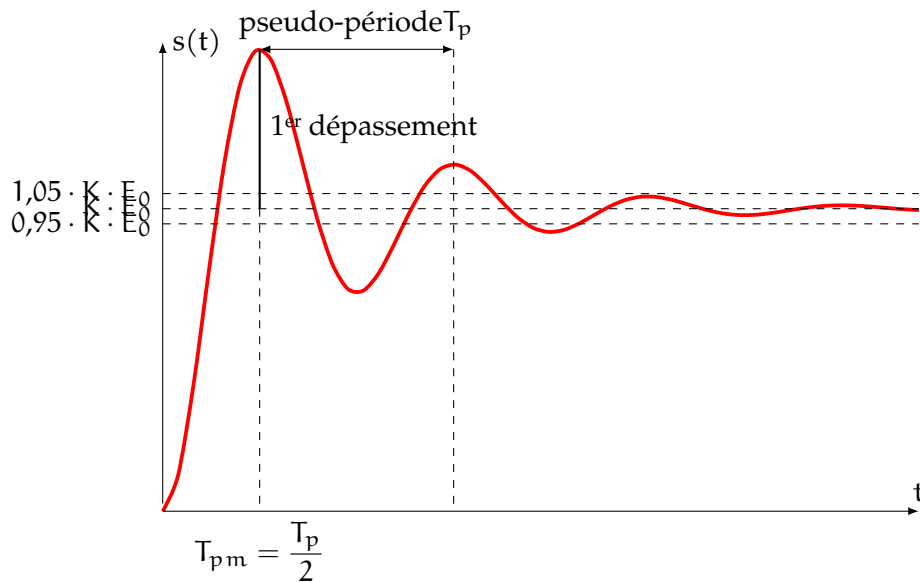


FIGURE 5.7 – Réponse temporelle d’un second ordre pour $0 < \xi < 1$ à une entrée en échelon

Les caractéristiques de cette réponse temporelle pseudo oscillatoire sont :

— La pseudo-période : $T_p = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$.

- La pseudo-pulsation : $\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$.
- L'instant du premier maximum : $T_{pm} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$.
- L'amplitude relative du premier dépassement : $D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}$.

Dépassements : L'amplitude des dépassements augmente d'autant plus fortement que le coefficient d'amortissement ξ diminue. Le nombre d'oscillation augmente lui aussi avec la diminution de ξ . L'abaque page suivante (figure 5.8) permet de déterminer l'amplitude relative de chaque dépassement en fonction du coefficient d'amortissement.

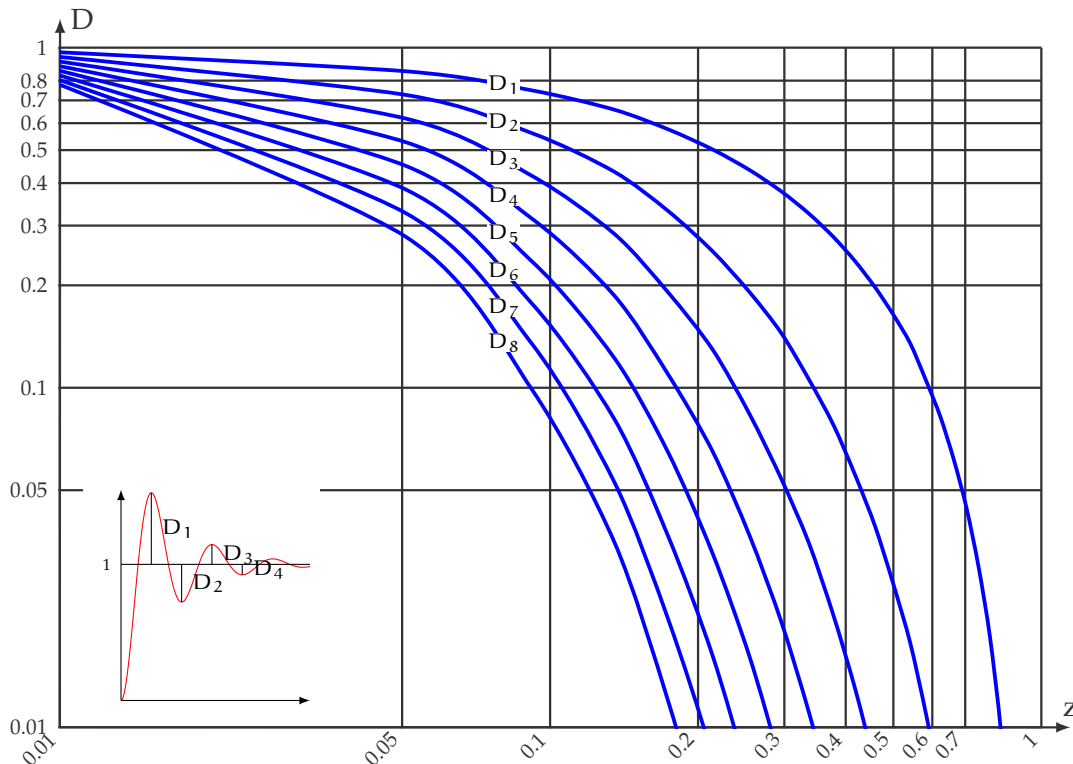


FIGURE 5.8 – Abaque des dépassements

Temps de réponse : Le temps de réponse à 5% évolue lui aussi de manière notable en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

L'abaque de la figure 5.10 donne le temps de réponse à 5% (en fait $T_{5\%} \cdot \omega_n$) pour un système du second ordre.

On constate sur cette abaque deux parties :

- pour $\xi > 0,7$, le temps de réponse augmente lorsque ξ augmente;
- pour $\xi < 0,7$, le temps de réponse augmente lorsque ξ diminue.

Le temps de réponse est minimal pour $\xi \approx 0,7$. Le temps de réponse sans dépassement lui est minimal pour $\xi = 1$.

$$\xi = 0,7 \text{ est la solution de } D_{1\%} = e^{\frac{-\pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} = 0,05.$$

La courbe réponse est alors tangente à la limite supérieure de détermination de $T_{5\%}$.

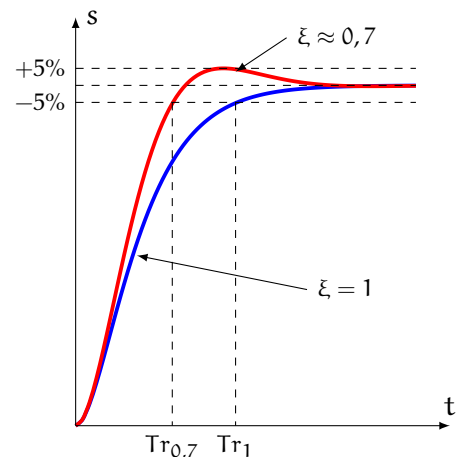


FIGURE 5.9 – Temps de réponse minimal

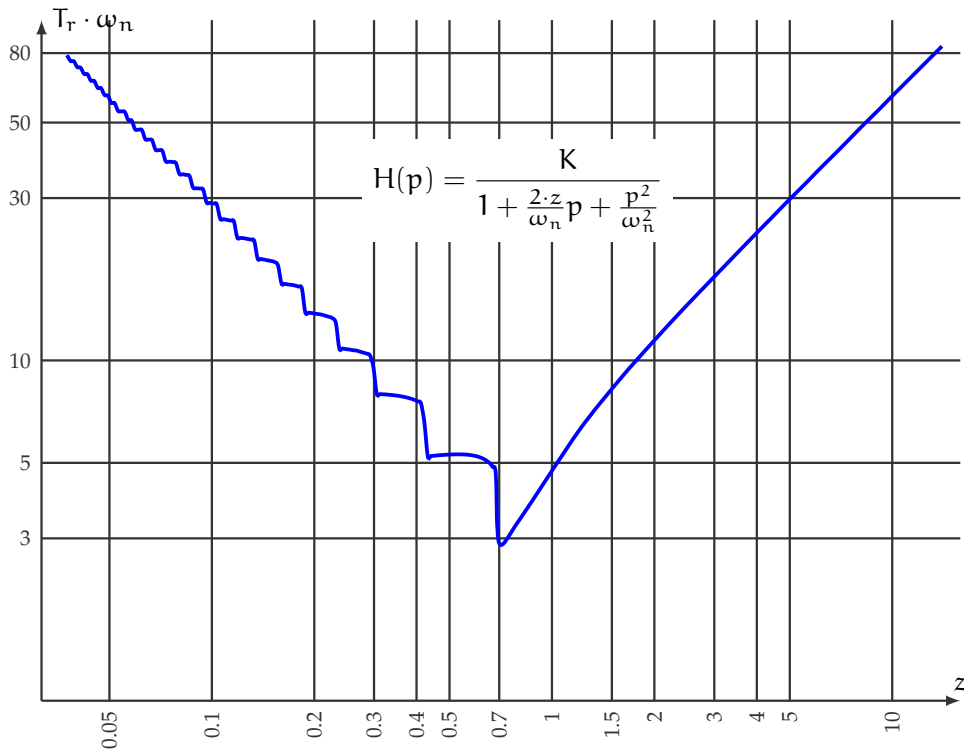


FIGURE 5.10 – Abaque des temps de réponse d'un second ordre

5.3 Intégrateur

On appelle système intégrateur, un système décrit par l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{ds(t)}{dt} = K \cdot e(t)$$

$$s(t) = \int_0^{+\infty} K \cdot e(u) du$$

La sortie est l'intégrale de l'entrée.

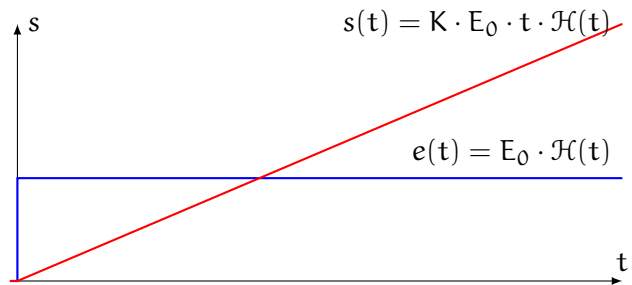
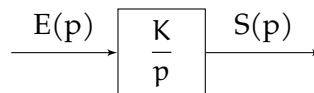


FIGURE 5.11 – Réponse temporelle d'un intégrateur

Dans les conditions de Heaviside :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p}$$



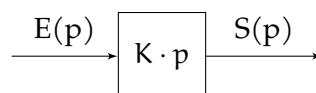
5.4 Dérivateur

On appelle système dérivateur, un système décrit par l'équation différentielle du premier ordre :

$$s(t) = K \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Dans les conditions de Heaviside :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \cdot p$$



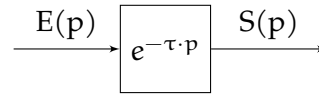
5.5 Retard

On appelle système retard, un système décrit par l'équation différentielle :

$$s(t) = e(t - \tau)$$

Dans les conditions de Heaviside :

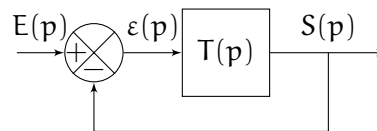
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau \cdot p}$$



5.6 Influence de la boucle fermée

On se propose dans cette partie d'évaluer l'influence du bouclage sur les caractéristiques temporelles des systèmes du premier et du second ordre.

Soit un système bouclé à retour unitaire défini par le schéma-bloc ci-contre :



La formule de Black, nous permet de déterminer rapidement la fonction de transfert en boucle fermée :

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

5.6.1 1^{er} ordre

$$T(p) = \frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}$$

avec K_o le gain en boucle ouverte et τ_o la constante de temps en boucle ouverte.

Alors

$$BF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}}{1 + \frac{K_o}{1 + \tau_o \cdot p}} = \frac{K_o}{1 + K_o + \tau_o \cdot p}$$

$$BF(p) = \frac{\frac{K_o}{1 + K_o}}{1 + \frac{\tau_o}{1 + K_o} \cdot p}$$

On constate qu'un système du premier ordre bouclé est aussi un système du premier ordre avec les caractéristiques suivantes :

— gain en boucle fermée : $K_f = \frac{K_o}{1 + K_o}$

— constante de temps en boucle fermée : $\tau_f = \frac{\tau_o}{1 + K_o}$

Le système bouclé est toujours plus rapide que le système en boucle ouverte, et d'autant plus rapide que le gain en boucle ouverte est important et le gain tend vers 1 si $K_o \rightarrow \infty$

Pour une entrée en échelon $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$, la sortie tend vers

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot \frac{K_f}{1 + \tau_f \cdot p} \cdot \frac{E_0}{p} \right) = K_f \cdot E_0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \frac{K_o}{1 + K_o} \cdot E_0$$

et l'erreur indicielle ε_i

$$\varepsilon_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot (E(p) - S(p)))$$

$$\varepsilon_i = \left(1 - \frac{K_o}{1 + K_o} \right) \cdot E_0 = \frac{1}{1 + K_o} \cdot E_0$$

La précision du système s'améliore donc lorsque $K_o \rightarrow \infty$.

5.6.2 2^d ordre

$$T(p) = \frac{K_o}{1 + \frac{2 \cdot \xi_o}{\omega_{n0}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{n0}^2}}$$

avec K_o le gain en boucle ouverte, ξ_o le coefficient d'amortissement en boucle ouverte et ω_{n0} la pulsation propre.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit sous sa forme canonique :

$$BF(p) = \frac{\frac{K_o}{1 + K_o}}{1 + \frac{2\xi_o}{(1 + K_o) \cdot \omega_{n0}} \cdot p + \frac{p^2}{(1 + K_o) \cdot \omega_{n0}^2}}$$

Le bouclage ne change pas l'ordre du système. Par identification, on obtient les caractéristiques du second ordre en boucle fermée :

- gain statique en boucle fermée : $K_f = \frac{K_o}{1 + K_o}$
- pulsation propre en boucle fermée : $\omega_{nf} = \omega_{n0} \cdot \sqrt{1 + K_o} > \omega_{n0}$
- coefficient d'amortissement en boucle fermée : $\xi_f = \frac{\xi_o}{\sqrt{1 + K_o}} < \xi_o$

Comme pour le système du premier ordre, le gain statique tend vers 1 lorsque K_o augmente.

On constate aussi que le facteur d'amortissement diminue et que la pulsation propre augmente. Cela implique qu'un système qui n'était pas oscillant en boucle ouverte peut le devenir en boucle fermée et s'il était oscillant, l'amplitude des oscillations et leur fréquence augmentent.

En conclusion, le bouclage d'un système modifie ses caractéristiques, il permet d'améliorer la rapidité et la précision mais peut rendre le système instable.

5.7 Systèmes complexes

5.7.1 Systèmes d'ordre supérieur à 2

Soit

$$H(p) = \frac{K}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots + a_n \cdot p^n}$$

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles peut se révéler fastidieux.

L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considérant un nombre restreint de paramètres en le ramenant à un système relativement simple.

Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de pôles (réels ou complexes conjugués) et tous ne possèdent pas la même influence sur les réponses temporelles.

Soit une fonction de transfert d'ordre supérieur à 2.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(1+p) \cdot \left(1 + \frac{p}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{20}\right)}$$

La réponse temporelle s'écrit

$$s(t) = 1 - \frac{25}{19} \cdot e^{-t} - \frac{1}{57} \cdot e^{-20 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{-5 \cdot t}$$

Dans cette réponse temporelle, tous les éléments n'ont pas le même poids, le terme $e^{20 \cdot t}$ tend beaucoup plus rapidement vers zéro que e^{-t} et $e^{-5 \cdot t}$, il peut donc être négligé par rapport aux deux autres.

Sur la figure 5.12 sont tracées les réponses temporelles pour un échelon unitaire des fonctions de transfert

$$H_2(p) = \frac{1}{(1+p) \cdot \left(1 + \frac{p}{5}\right)} \text{ et } H_1(p) = \frac{1}{(1+p)}$$

On remarque qu'il n'y a peu de différence en régime permanent. La première simplification est proche du comportement de $H(p)$, par contre l'erreur pour la seconde simplification est notable au début.

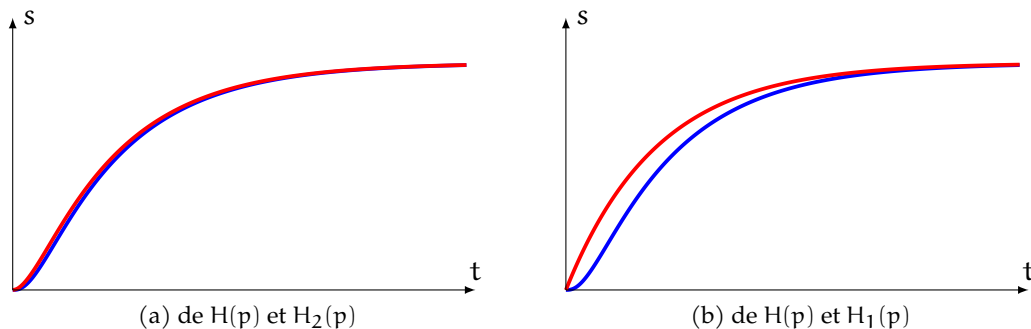


FIGURE 5.12 – Comparaison des réponses temporelles

On peut déduire de cet exemple.

- Un système d'ordre élevé possède, la plupart du temps, 1 ou 2 pôles dominants et se « comporte » donc comme un système du premier ou du deuxième ordre.
- On peut simplifier la fonction de transfert d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le (ou les) pôle(s) dominant(s) (approximation par un système du premier ou du deuxième ordre).
- En pratique, un pôle peut être négligé dès que sa constante de temps est 4 à 5 fois inférieure à la constante de temps du pôle dominant.

Cet exemple ne traite que de la simplification d'un système non oscillatoire mais les conclusions sont généralisables aux systèmes avec un comportement oscillatoire amorti.

5.7.2 Influence d'un zéro

Soit la fonction de transfert possédant un zéro² réel :

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + a \cdot p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2}$$

Cette fonction peut s'écrire :

$$H(p) = K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \right)$$

Elle se construit donc comme la somme de deux fonctions de transfert. La fonction sans le numérateur à laquelle on ajoute la dérivée de cette fonction affectée du coefficient a .

La réponse temporelle à un échelon unitaire est donc :

$$S(p) = K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$$

On pose $s_1(t) = L^{-1} \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right)$, alors

$$s(t) = K \cdot \left(s_1(t) + a \cdot \frac{d s_1(t)}{dt} \right)$$

À partir du théorème de la valeur finale, on constate que le terme dérivé ne modifie pas la valeur finale.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \left(p \cdot K \cdot \left(\frac{1}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} + a \cdot \frac{p}{1 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \cdot \frac{1}{p} \right) \right) = K \end{aligned}$$

Le zéro a surtout un effet pendant le régime transitoire.

a) Cas d'un zéro négatif

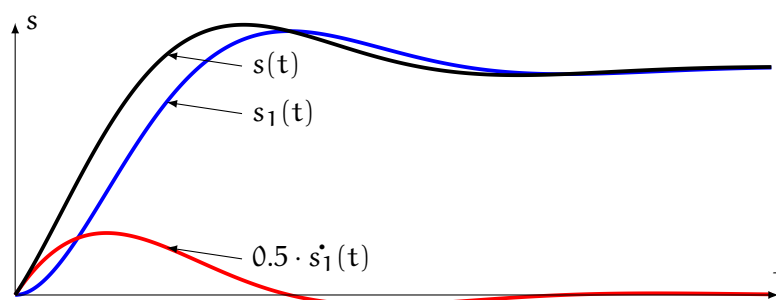


FIGURE 5.13 – Influence d'un zéro négatif

Sur la figure 5.13 on a tracé la réponse temporelle à un échelon de la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 + 0.5 \cdot p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} + \frac{0.5 \cdot p}{1 + p + p^2}$$

On retrouve la réponse temporelle $s(t) = s_1(t) + 0.5 \cdot s_1'(t)$.

2. Un zéro est une racine du numérateur.

On constate sur ce graphe que l'effet du numérateur avec un zéro négatif est d'accélérer la réponse temporelle mais aussi d'amplifier les dépassements.

b) Cas d'un zéro positif

Sur la figure 5.14 on a tracé la fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{1 - 0.5 \cdot p}{1 + p + p^2} = \frac{1}{1 + p + p^2} + \frac{0.5 \cdot p}{1 + p + p^2}$$

présentant un pôle positif.

On constate que la réponse temporelle $s(t)$ présente un « undershot » c'est-à-dire un dépassement vers le bas au démarrage.

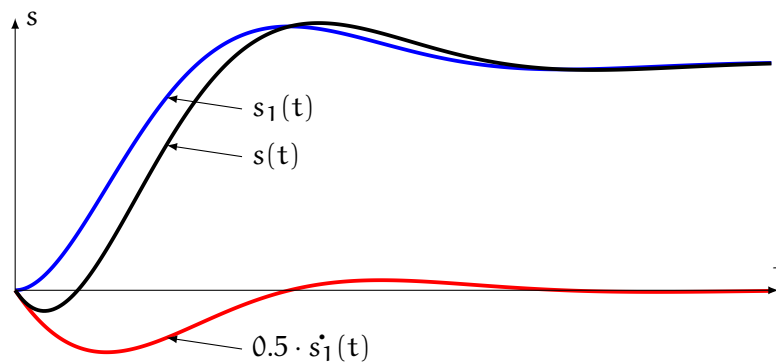


FIGURE 5.14 – Influence d'un zéro positif

5.7.3 Pôles positifs

Jusqu'ici, nous n'avons traité que le cas de pôles réels négatifs ou de pôles complexes à partie réelle négative. Quel est l'effet d'un pôle réel positif sur le comportement du système ?

Soit

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p) \cdot (1 - \tau \cdot p)} \quad \text{avec } \tau > 0$$

Étudions la réponse temporelle à un échelon :
 $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$.

$$S(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p) \cdot (1 - \tau \cdot p)} \cdot \frac{E_0}{p}$$

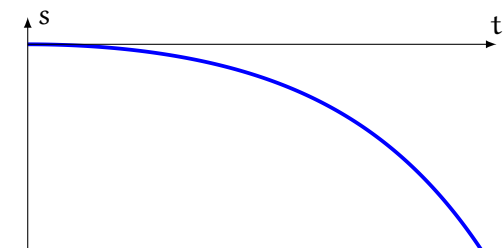


FIGURE 5.15 – Influence d'un pôle réel positif

d'où la décomposition en fractions simples :

$$S(p) = K \cdot E_0 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{2 \cdot (1 + \tau \cdot p)} + \frac{\tau}{2 \cdot (1 - \tau \cdot p)} \right)$$

et la réponse temporelle

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \left(e^{\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \mathcal{H}(t)$$

Cette fonction temporelle diverge (figure 5.15), elle tend $-\infty$.

De la même manière, un système possédant deux pôles complexes conjugués à partie réelle positive diverge aussi mais en oscillant. Le graphe 5.16 présente l'allure de la réponse temporelle à un échelon unitaire de :

$$H(p) = \frac{1}{1 - p + 10 \cdot p^2}$$

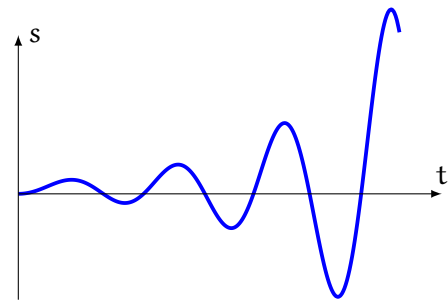


FIGURE 5.16 – Influence de pôles complexes conjugués à partie réelle positives]

5.7.4 Réponse temporelle et position des pôles

On peut regrouper les différents résultats sur la figure 5.17 sur laquelle est représentée la réponse à une impulsion de Dirac ($e(t) = \delta(t)$) en fonction de la nature des pôles de la fonction de transfert.

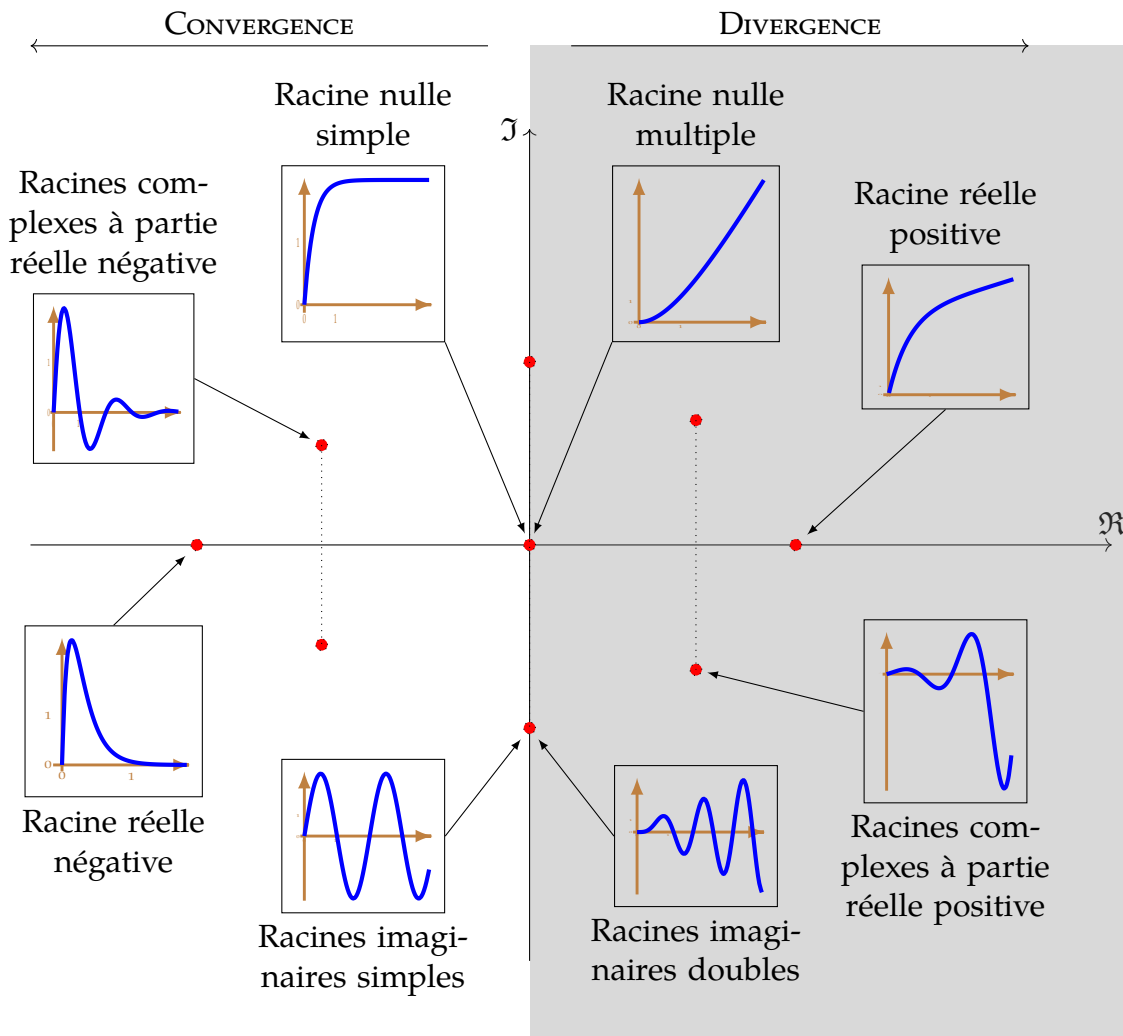


FIGURE 5.17 – Réponse temporelle en fonction de la position des pôles

Un critère important de réglage de fonction de transfert d'un système asservi est de s'assurer que tous les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle négative.