

# DM-Automne

## Devoir 1 - Système de simulation de trajectoire

Mines-Ponts

Corrigé page 7

### A. Présentation du système

Le Service des Grands Moyens d'Essais de l'O.N.E.R.A. (Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales) a réalisé un système de trajectographie captive. Lors du largage d'une charge par un avion porteur (missile, réservoir ...), la trajectoire réelle de la charge s'écarte parfois considérablement de la trajectoire souhaitée. Du fait des phénomènes fortement non-linéaires qui caractérisent les écoulements aérodynamiques, il se peut que la charge larguée soit prise dans les turbulences engendrées par l'avion et revienne percuter celui-ci.

Pour étudier ces phénomènes, il est en principe possible de former un modèle théorique (par exemple basé sur les équations de la mécanique du solide et de la mécanique des fluides) implanté sur un système informatique qui résout numériquement ces équations. Or dans les cas complexes, ce calcul numérique est encore hors de portée des meilleurs codes de calcul et des meilleurs ordinateurs actuels. On a donc recours à ce que les ingénieurs utilisent depuis l'Antiquité : un modèle matériel, une maquette.

Celle-ci consiste en une maquette d'avion à l'échelle 1/6, larguant une maquette de la charge à la même échelle. Chacune est portée par un bras articulé, doté de nombreux degrés de liberté et pouvant reproduire tous les mouvements tridimensionnels des objets portés (cf. Figures 1 et 2, page 1 et figure 3, page 3).



FIGURE 1 – Maquette dans le simulateur

En repère d'étude galiléen, les bilans des efforts extérieurs aux solides en présence (avion et charge) se réduisent au poids et aux efforts d'origine aérodynamique. C'est pourquoi on place les maquettes en soufflerie. Les phénomènes de mécanique des fluides obéissent à des similitudes : à partir des grandeurs physiques observées à une certaine échelle, on peut déduire la valeur de ces mêmes grandeurs à une autre échelle. Le respect des règles de similitude conduit cependant à une échelle de maquette proche de l'avion réel. Ceci explique l'importance des moyens matériels en jeu : la partie centrale de la soufflerie a huit mètres de diamètre sur une longueur de quatorze mètres. La fonction du système de

trajectographie est d'observer une trajectoire représentative de la trajectoire réelle de la charge larguée par rapport à l'avion en vol.

Le système sert de moyen de mesure et de commande. La simulation de trajectoire se fait de façon statique, pas à pas. L'avion et la charge sont placés par le système de commande de chaque bras en une position donnée. Les efforts aérodynamiques sur la charge sont alors mesurés. On en déduit, par les équations de la mécanique du solide, la position de la charge après un incrément de temps (c'est à dire une durée  $\delta t$  finie, choisie à l'avance, et faible par rapport à la durée totale du largage). On commande alors le déplacement jusqu'à la nouvelle position, et on itère. A la fin de l'essai, la suite mémorisée des positions successives est analysée.

Dans ce sujet, on s'intéressera à une sous-partie du système automatisé de déplacement de la charge par son bras "robotisé".

## B. Analyse fonctionnelle et structurelle du système

### B.1. Description du fonctionnement

**Q1.** Établir la description séquentielle d'un essai. Cette description sera construite à partir des tâches correspondant aux fonctions principales du système de trajectographie (par exemple « Remettre la Partie Opérative en état initial ») ainsi que des informations globales (par exemple « Fin de trajectoire atteinte »). Le formalisme à utiliser est laissé à l'initiative du candidat : algorithme sous quelque forme que ce soit (organigramme machine à états (stm), description en « pseudo-langage »), etc. Cette étude est située en amont de l'analyse, et la synthèse ne préjuge ni des choix technologiques de la Partie Opérative, ni a fortiori de ceux de la Partie Commande.

### B.2. Organisation mécanique de la partie opérative

La nécessité de pouvoir simuler des trajectoires complexes a conduit à la réalisation d'un nombre important de liaisons entre les éléments du bras support. Elles sont décrites sur la figure 3, page 3.

Les rotations entre les éléments d'un même bras sont données par des moto-réducteurs (ensemble moteur + réducteur) intégrés au bras. Les mouvements entre les différents bras sont engendrés par des vérins électriques à vis. Le schéma cinématique de la figure 4 précise les différentes liaisons (on modélisera la liaison « vérin » par une liaison pivot glissant).

**Q2.** Tracer le graphe de structure du mécanisme du bras support de charge.

Le mouvement relatif de deux solides dans l'espace peut se décomposer suivant 6 déplacements élémentaires.

**Q3.** Préciser les 6 déplacements élémentaires. Le mécanisme du support de charge permet-il des réaliser ces 6 mouvements.

## C. Vérification des performances

### C.1. Étude cinématique et dynamique d'un sous ensemble de rotation

La définition d'une trajectoire de la charge nécessite d'imposer, en permanence, des relations entre les valeurs instantanées des paramètres cinématiques. On se propose de le montrer dans un cas simple. Seules les liaisons  $L_1$ ,  $L_3$ , et  $L_5$  sont animées (voir le paramétrage de position sur la figure 5 page 4). Dans ce cas, le bras de liaison BD est noté « 0 », l'ensemble  $C_1 \cup B_1$  forme un solide noté « 1 », les deux parties du bras  $B_2$  forment un solide noté « 2 », les deux parties du bras  $B_3$  et la charge forment un solide noté « 3 ».

Notations :

— Dans un problème plan  $(O, \vec{j}, \vec{k})$ , le torseur cinématique associé au mouvement d'un solide m par rapport à un solide n s'écrit au point P et sur la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\left\{ \mathcal{V}_{m/n} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{m/n} = \omega_{m/n} \cdot \vec{i} \\ \vec{V}_{(P, m/n)} = V_y(P, m/n) \cdot \vec{j} + V_z(P, m/n) \cdot \vec{k} \end{array} \right\}_P$$

— Un vecteur lié à un solide porte l'indice du solide; exemple :  $\vec{k}_2$ .

— Un vecteur lié à deux solides porte les indices des solides ; exemple :  $\vec{k}_{01}$ .

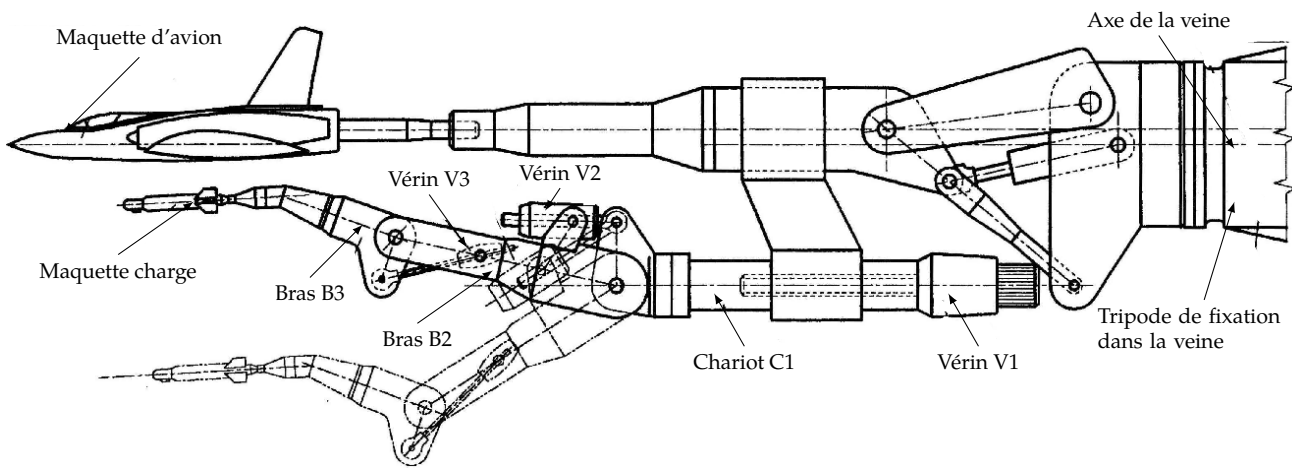


FIGURE 2 – Système de trajectographie captive

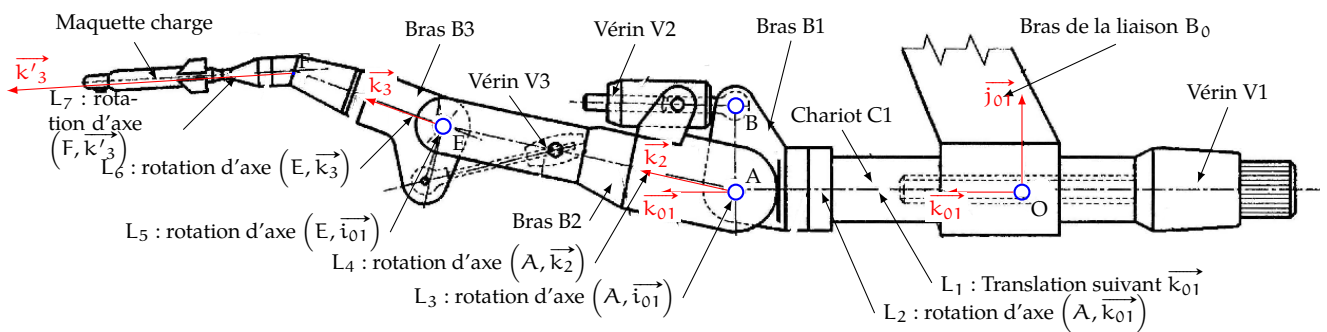


FIGURE 3 – Bras support de la maquette de charge

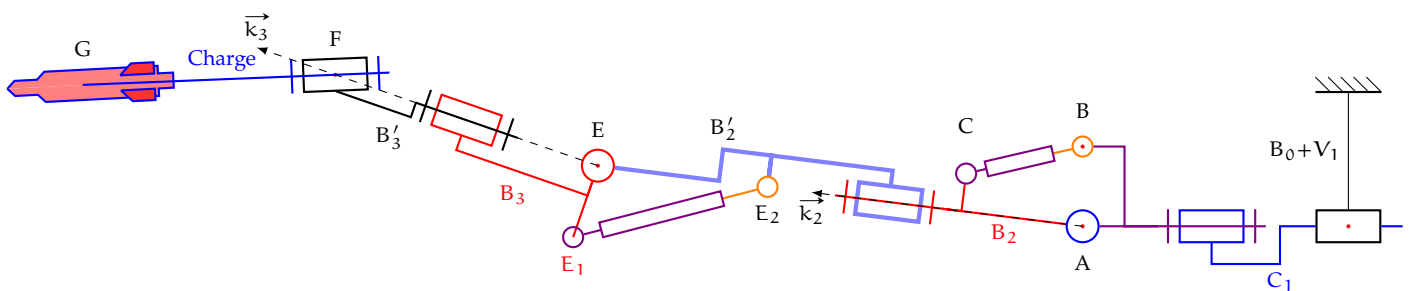


FIGURE 4 – Schéma cinématique

**Q4.** Donner l'expression du vecteur vitesse  $\vec{V}(F, 3/0)$  du point F, lié à la charge (solide 3), dans son mouvement dans le repère  $R_0$  (lié au bras 0) en fonction du paramétrage proposé. (On exprimera le résultat sous la forme vectorielle la plus simple, utilisant les vecteurs unitaires définis sur la figure 5).

Dans le repère lié à l'avion, un des mouvements de la charge (3/0) les plus simples que l'on puisse envisager est une translation selon  $\vec{j}_{01}$ . Dans ce cas :

**Q5.** Quelle relation existe-t-il entre  $\omega_{2/1}$  et  $\omega_{3/2}$  ?

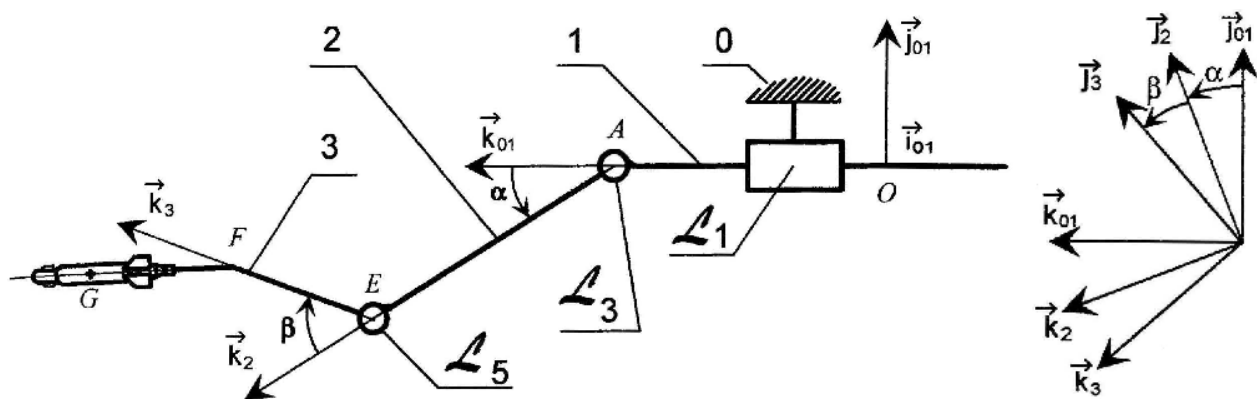
**Q6.** Quelle relation existe-t-il alors entre  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\lambda$  ?

**Q7.** Donner l'expression de la norme de  $\vec{V}(F, 3/0)$ .

**Q8.** Donner l'expression du vecteur  $\vec{V}(G, 3/0)$ .

La rédaction des calculs et justifications sera concise et, s'il le faut, résumée.

Par la suite, on envisage d'autres mouvements de la charge par rapport à l'avion.



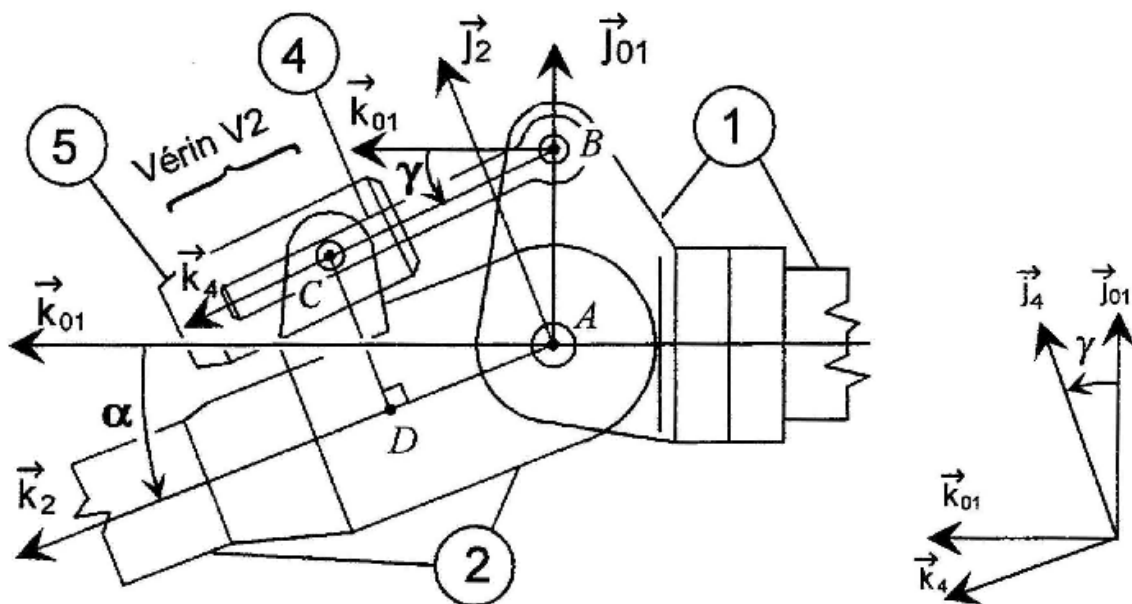
- Liaison 0/1 :  $R_1$  se déduit de  $R_0$  par la translation  $\vec{OA} = \lambda \cdot \vec{k}_{01}$ .
- Liaison 1/2 :  $R_2$  se déduit de  $R_1$  par la rotation d'axe  $(A, \vec{i}_{01})$  et d'angle  $\alpha(t) = (\vec{j}_{01}, \vec{j}_2)$ .
- Liaison 2/3 :  $R_3$  se déduit de  $r_2$  par la rotation d'axe  $(E, \vec{i}_{01})$  et d'angle  $\beta(t) = (\vec{j}_2, \vec{j}_3)$ .
- Données :  $AE = L_2$ ,  $EF = L_3$ ,  $FG = L'_3$ .

FIGURE 5 – Modèle cinématique simplifié et figures de calculs

### C.2. Étude du dispositif animant la liaison $L_3$ (voir figure 6 page 4).

Le vérin à vis  $V_2$  permet d'animer la liaison  $L_3$  grâce à un mécanisme assurant une transformation de mouvement : la translation de la tige 4 du vérin par rapport au corps 5 provoque une rotation du solide 2 par rapport au solide 1. Ce vérin doit être piloté de manière à assurer un mouvement de la charge conforme aux efforts mesurés. Cette transformation de mouvement s'exprime par deux lois entrée-sortie reliant la translation de la tige 4 du vérin à la rotation du solide 2 :

$$\mu = f(\alpha) \text{ et } \dot{\mu} = g(\alpha, \dot{\alpha}) \text{ où } (\mu, \dot{\mu}, \alpha, \dot{\alpha}) \text{ sont des fonctions du temps.}$$



- Liaison 4/5 :  $R_5$  se déduit de  $R_4$  par la translation  $\vec{BC} = \mu(t) \cdot \vec{k}_4$ .
- Liaison 1/4 :  $R_4$  se déduit de  $R_1$  par la rotation d'axe  $(B, \vec{i}_{01})$  et d'angle  $\gamma(t) = (\vec{j}_{01}, \vec{j}_4)$ .
- Données :  $AB = h$ ,  $AD = \ell$ ,  $DC = a$ .

FIGURE 6

**Q9.** A l'aide du paramétrage proposé sur la figure 6 page 4, donner une équation vectorielle traduisant la disposition géométrique des liaisons entre les solides 1, 2, 4, 5.

**Q10.** Éliminer  $\gamma$  de cette équation vectorielle pour en déduire la loi entrée-sortie des espaces  $\mu = f(\alpha)$ .

La courbe ci-contre (figure 7) donne une représentation de la variation de  $\mu$  dans un domaine où  $\alpha$  est compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .

Les dispositions constructives placent la zone d'évolution du bras dans un domaine où  $\alpha$  varie de  $-0,26$  à  $+0,70$  rad.

**Q11.** Quel avantage ces dispositions constructives procurent-elles?

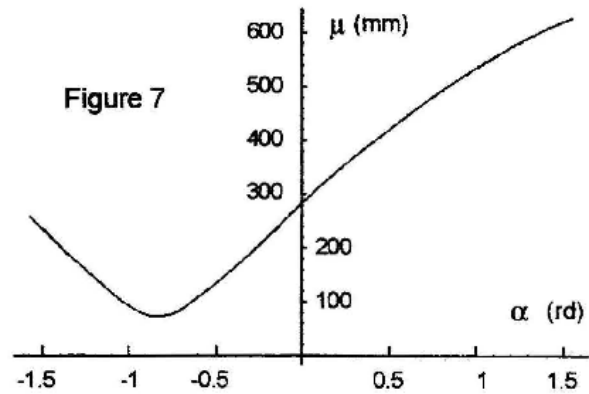


FIGURE 7

**Q12.** Établir la relation  $\dot{\mu} = g(\alpha, \dot{\alpha})$ .

**C.3. Étude dynamique (voir figure 8 page 5)**

Les déplacements donnés aux différentes parties du bras doivent permettre un mouvement conforme à celui qui est attendu. Or les masses considérables des bras, et les actions aérodynamiques de l'air en mouvement dans la veine sur ceux-ci, ne peuvent être négligées.

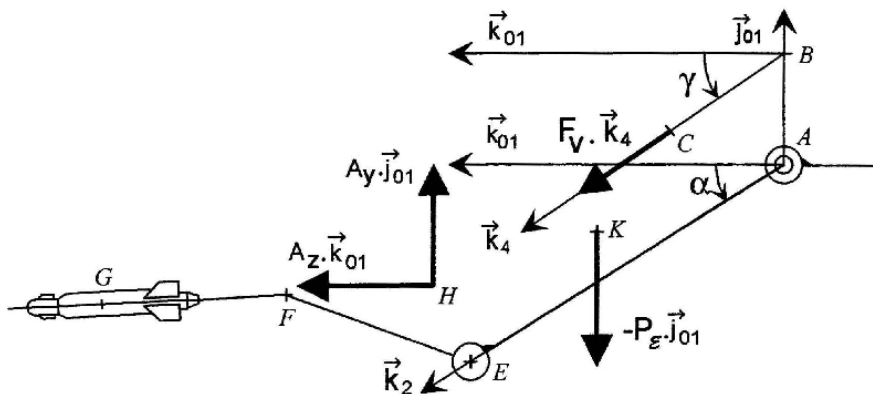


FIGURE 8

Dans ce paragraphe, seule la liaison  $L_3$  est animée. L'ensemble  $[0 \cup 1]$  forme donc un solide, de repère noté  $R_{01}$ ; l'ensemble  $[2 \cup 3]$  forme un solide, noté  $\varepsilon_{23}$  que l'on isole.

Les actions aérodynamiques sur cet ensemble, notées  $\{A \rightarrow \varepsilon_{23}\}$ , sont représentables par un glisseur passant par un point H représenté sur la figure 8 page 5 et défini par :

$$\overrightarrow{AH} = Y_H \cdot \vec{j}_{01} + Z_H \cdot \vec{k}_{01} \text{ et } \{A \rightarrow \varepsilon_{23}\}_H = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{A \rightarrow \varepsilon_{23}}} = A_y \cdot \vec{j}_{01} + A_z \cdot \vec{k}_{01} \\ 0 \end{matrix} \right\}_H$$

$$\text{L'action du vérin } V_2 \text{ sur } B_2 \text{ est représentée par le glisseur } \{V_2 \rightarrow B_2\}_C = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{V_2 \rightarrow B_2}} = F_v \cdot \vec{k}_4 \\ 0 \end{matrix} \right\}_C$$

$K$ , le centre d'inertie de l'ensemble  $\varepsilon_{23}$  est défini par :  $\overrightarrow{AK} = Y_K \cdot \vec{j}_2 + Z_K \cdot \vec{k}_2$ ;  
le poids de l'ensemble est  $P_e$ .

Le moment d'inertie de cet ensemble  $\varepsilon_{23}$  par rapport à l'axe  $(A, \vec{i}_{01})$  est noté  $J_e$ . La liaison 1/2 est parfaite, le repère  $R_{01}$  est supposé galiléen.

**Q13.** Justifier que  $\{V_2 \rightarrow B_2\}_C$  est un glisseur.

**Q14.** Écrire le théorème du moment dynamique en A, en projection sur  $\vec{i}_{01}$  appliqué à l'ensemble  $\varepsilon_{23}$ , dans son mouvement par rapport au galiléen.

**Q15.** Une évaluation de l'effort fourni par le vérin peut être obtenue dans le mouvement à  $\dot{\alpha}$  constant. Donner dans ce cas l'expression de  $F_v$ . (On n'explicitera pas  $\gamma$ ).

## D. Étude de la motorisation du vérin électrique

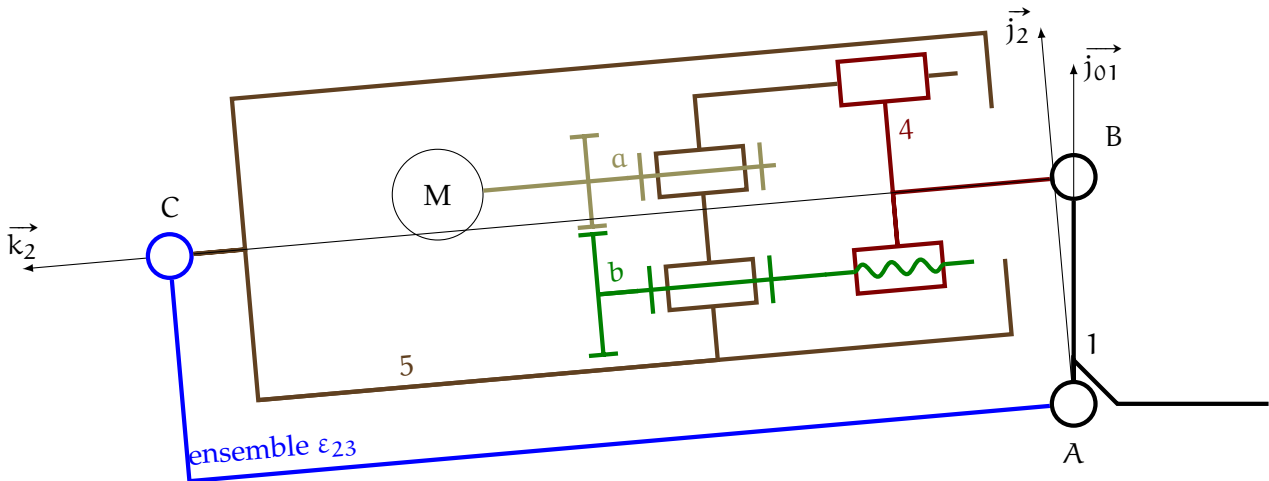


FIGURE 9 – Sous ensemble de rotation

La figure 9 est un zoom sur le vérin électrique  $V_2$ , commandant le mouvement de rotation de l'articulation  $L_3$ . L'actionneur est un moteur à courant continu à commande d'induit, bien adapté à la commande d'axe. Les liaisons mécaniques qui constituent l'effecteur transforment la rotation de son arbre (a) en translation de la tige 4 par rapport au corps 5, et donc en rotation de l'ensemble  $\varepsilon_{23}$  par rapport à 1.

Même si la mesure est réalisée de façon statique, le déplacement d'une position à une autre doit obéir à une loi de vitesse choisie à l'avance; de plus, la durée totale de l'essai dépend en partie de la rapidité de cet asservissement. Il est donc naturel de réaliser un "asservissement de vitesse" sur  $\omega(t)$ , à partir d'une consigne de pulsation de rotation  $\omega_c(t)$  élaborée par la Partie Commande. Cet "asservissement de vitesse" sera complété par un asservissement de position qui n'est pas étudié ici.

Dans toute cette partie seule la liaison  $L_3$  est animée.

**Q16.** Tracer le graphe de structure de l'ensemble  $\{5, 4, a, b\}$ .

**Q17.** Évaluer le degré de mobilité et le degré d'hyperstaticité, on considère pour ce calcul que la liaison engrenage ajoute une relation cinématique entre les deux arbres (a) et (b).

### D.1. Moment d'inertie équivalent (voir figure 9)

Dans cette partie, on se propose de montrer que, du point de vue du moteur, la transmission en aval se comporte comme un seul arbre en rotation, d'un moment d'inertie dit « équivalent » noté  $J_{eq}$ .

Dans cette question seulement, on notera  $\omega_a$  et  $\omega_b$  les pulsations de rotation des arbres (a) et (b) par rapport à 5;  $v$  désigne la vitesse de 4 par rapport à 5. On appelle  $R_a$  et  $R_b$  les rayons des roues dentées (a) et (b), et  $p$  le pas de la liaison hélicoïdale entre (b) et 4, c'est à dire la valeur de la translation de 4 obtenue pour un tour de (b). La distance AB est  $h$ . Les moments d'inertie de (a) et (b) par rapport à leurs axes sont respectivement  $J_a$  et  $J_b$  celui de  $\varepsilon_{23}$  par rapport à  $(A, \vec{i}_{01})$  est  $J_e$ .

Hypothèses simplificatrices : La masse de 4 est négligée.  $R_{01}$  est supposé galiléen. Par rapport à  $\omega_a$  et  $\omega_b$ ,  $\dot{\alpha} = \omega_{2/1}$  et  $\dot{\gamma} = \omega_{5/1}$  sont assez faibles pour pouvoir considérer  $R_5$  comme galiléen en première approximation. Par contre l'énergie cinétique de 2 par rapport à  $R_{01}$  n'est pas négligeable du fait du grand moment d'inertie  $J_e$ .

**Q18.** Écrire l'énergie cinétique du système (a,b,4,5,  $\varepsilon_{23}$ ) par rapport à  $R_{01}$  dans la position de la figure 9, c'est à dire  $\gamma = 0$ , soit  $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ . En déduire  $J_{eq}$ .

### D.2. Détermination du couple moteur

**Q19.** Proposer une procédure permettant d'obtenir le couple moteur  $C_m$  fourni par le moteur en fonction du poids de l'ensemble  $P_e$ , des actions aérodynamiques, de  $J_{eq}$ .

**Q20.** Mettre en place cette procédure le plus précisément possible sans aller jusqu'à la résolution des équations.