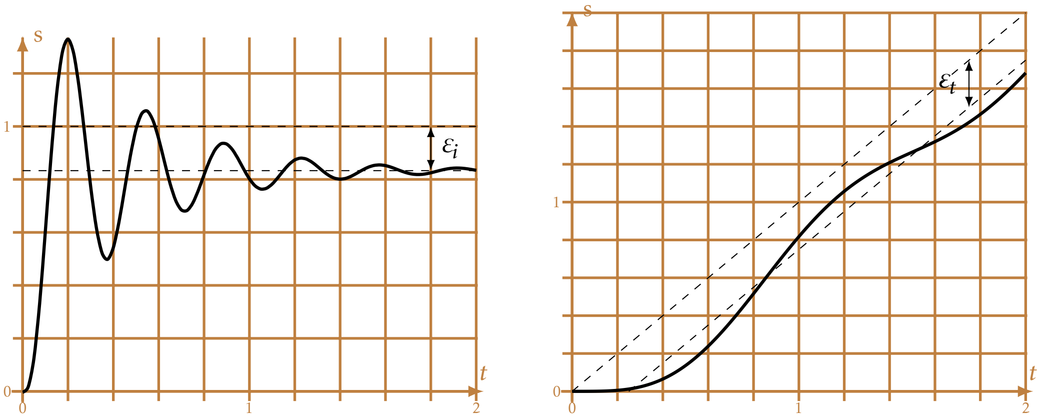
5.1 Précision

5.1.1 Position du problème

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi ou d'une régulation. La précision est évaluée aussi bien vis-à-vis de l'entrée de consigne que vis-à-vis des perturbations. Un système doit être précis relativement à l'entrée en étant insensible aux perturbations. Les perturbations ne doivent pas dégrader la précision de la réponse finale.



(a) Erreur indicielle (b) Erreur de traînage

FIGURE 5.1 – Erreur statique

On distingue :

L'erreur statique : C'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- Échelon, on parle alors d'*erreur indicielle* (figure 5.1a).
- Rampe, *erreur de traînage* ou erreur de poursuite (figure 5.1b).
- Accélération, erreur en accélération.

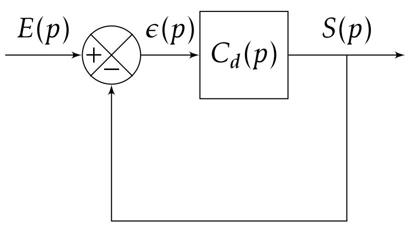
L'erreur dynamique : C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

5.1.2 Données

La précision est évaluée par l'écart $\varepsilon(t)$ mesuré pour un système à retour unitaire entre $e(t)$ et $s(t)$. Dans le cas d'un système à retour non unitaire il se mesure entre $e(t)$ et $m(t)$, avec $m(t)$ la mesure de $s(t)$.

Déterminons dans les deux cas l'erreur $\varepsilon(t)$ (pour une perturbation nulle).

a) Cas du retour unitaire

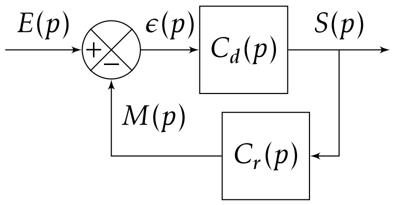


$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$
$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot \varepsilon(p)$$
$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1 + C_d(p)}\right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p)$$

b) Cas du retour non unitaire



$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$$
$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot C_r(p) \cdot \varepsilon(p)$$
$$\varepsilon(p) = \left(\frac{1}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)}\right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p) \cdot C_r(p)$$

soit finalement dans les deux cas :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + BO(p)} E(p)$$

L'erreur dépend de la FTBO et de la nature de l'entrée.

Pour la suite, nous ne traiterons que le cas de système à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la FTBO peut être mise sous la forme :

$$BO(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}$$

- $K > 0$: le gain,
- $\alpha \geq 0$: la classe du système,
- $N(p)$: polynôme de degré n avec $N(0) = 1$,
- $D(p)$: polynôme de degré m avec $D(0) = 1$.

Remarque : Pour un système physique le degré du dénominateur $m + \alpha > n$.

5.1.3 Erreur en régime permanent - Erreur statique

a) Définition

L'écart en régime permanent est la limite quand t tend vers l'infini de l'écart entre $e(t)$ et $s(t)$:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \to \infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t))$$

Un système sera précis si cet écart tend vers 0.

b) Calculs préalables

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t \to \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \to 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

Remarque importante : Ce théorème ne peut-être utilisé que si la sortie converge, c'est-à-dire si le système est stable. Nous supposerons donc pour la suite que le système est stable.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + BO(p)} E(p) = \frac{1}{1 + \dfrac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}} E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} E(p)$$

d'où pour l'erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}\left(p\frac{p^\alpha\cdot D(p)}{p^\alpha\cdot D(p)+K\cdot N(p)}E(p)\right)$$

Finalement en se rappelant que : $N(0) = 1$ et $D(0) = 1$:

$$\varepsilon_s = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}E(p)\right)$$

En conclusion, l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée $E(p)$ et de la classe α de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain K de la FTBO.

c) Erreur indicielle - Réponse à un échelon

On nomme erreur indicielle ε_i, l'erreur statique relative à une entrée en échelon $e(t) = E_0\cdot\mathscr{H}(t)$ avec $\mathscr{H}(t)$ la fonction de Heaviside.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire :

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}E(p)\right)$$

avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) = \dfrac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}\frac{E_0}{p}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^\alpha + K}E_0\right)$$

On peut considérer deux cas en fonction de la classe du système.

Système de classe 0 ($\alpha = 0$) : La FTBO ne comporte pas d'intégration

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^0}{p^0 + K}E_0\right) = \frac{1}{1+K}E_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain K de la FTBO, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

Système de classe > 0 ($\alpha > 0$) : La FTBO comporte au moins une intégration dans la boucle

$$\varepsilon_i = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha}}{p^\alpha + K}E_0\right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quel que soit le gain K de la FTBO.

Remarque : Par abus de langage on appelle souvent erreur statique, l'erreur indicielle.

d) Erreur de traînage - Réponse à une rampe

L'erreur de traînage (aussi nommée erreur de poursuite) ε_t, est l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe $e(t) = A_0\cdot t\cdot\mathscr{H}(t)$ et la sortie.

Comme précédemment

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0} p\cdot\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}E(p)\right)$$

avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) = \dfrac{A_0}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}\frac{A_0}{p^2}\right) = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}\right)$$

L'erreur de traînage dépend comme l'erreur indicielle du gain K et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas.

Système de classe 0 $(\alpha = 0)$ **:** La FTBO ne comporte pas d'intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{-1}}{p^0 + K}\right) = +\infty$$

L'écart tend vers $+\infty$, la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

Système de classe 1 $(\alpha = 1)$ **:** La FTBO comporte une intégration

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^0}{p^1 + K}\right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de ε_t.

Système de classe > 1 $(\alpha > 1)$ **:** La FTBO comporte au moins deux intégrations.

$$\varepsilon_t = \lim_{p\to 0}\left(A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}\right) = 0$$

L'erreur de traînage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque $t \to +\infty$.

e) Erreur en accélération - Réponse à une consigne parabolique

On se propose maintenant de déterminer l'erreur en accélération, ε_a, correspondant à une entrée de type parabolique $e(t) = A_O \cdot t^2 \cdot \mathscr{H}(t)$.

Comme dans les études précédentes avec $e(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} E(p) = \dfrac{2 \cdot A_0}{p^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K}\frac{A_0}{2 \cdot p^3}\right) = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K}\right)$$

En fonction de α on obtient :

Système de classe < 2 $(0 < \alpha < 2)$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K}\right) = +\infty$$

Système de classe 2 $(\alpha = 2)$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^0}{p^2 + K}\right) = \frac{2 \cdot A_0}{K}$$

Système de classe > 2 $(\alpha > 2)$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K}\right) = 0$$

f) Tableau récapitulatif

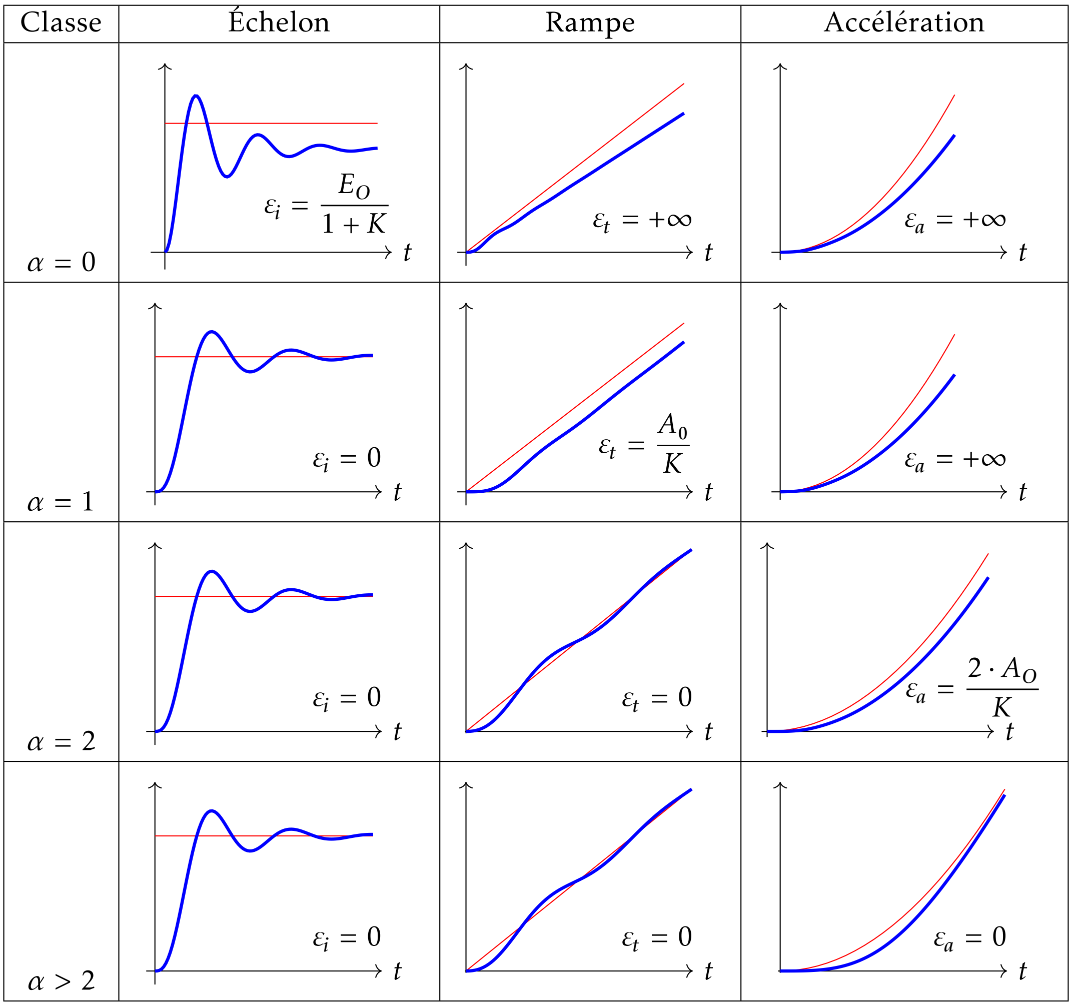


Tableau 5.1 – Tableau récapitulatif : influence de la classe sur l'erreur statique

Le tableau de la présente page récapitule les différentes erreurs et l'allure des réponses temporelles correspondantes.

Il ne faut pas déduire rapidement du tableau 5.1 qu'il suffit de corriger le système en rajoutant une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de $-90°$, le système risque donc de devenir instable. Ce tableau n'a de sens que si le système est stable !

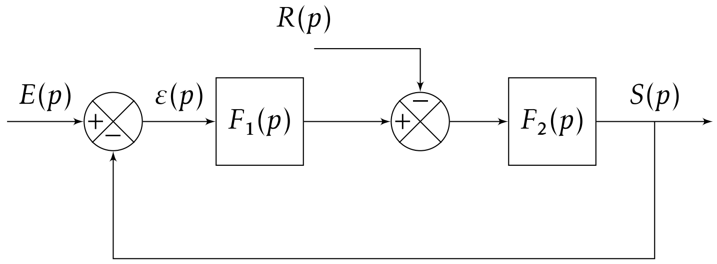
5.1.4 Effet d'une perturbation sur la précision

a) Présentation du problème

On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système et l'influence de la forme de la fonction de transfert sur l'impact de cette perturbation.

À partir du modèle d'étude décrit par le schéma blocs et les fonctions de transfert suivants :

$F_1(p) = \dfrac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}$ et $F_2(p) = \dfrac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$
avec $N_1(0) = D_1(0) = 1$, $N_2(0) = D_2(0) = 1$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$.



Déterminons l'écart $\epsilon(t)$

$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - F_2(p)\cdot(F_1(p)\cdot\varepsilon(p)) - R(p))$$
$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1+F_1(p)\cdot F_2(p)}\cdot E(p) - \frac{F_2(p)}{1+F_1(p)\cdot F_2(p)}\cdot R(p)$$

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée (résultat général que l'on retrouve par le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires).

Nous limiterons notre étude au cas d'une perturbation constante, les autres types de perturbations se traitant de la même manière.

b) Perturbation constante

À partir du théorème de superposition, on sait que la réponse obtenue pour un système linéaire à deux entrées est la somme des sorties de chaque entrée prise isolément.

Pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser $e(t) = 0$. On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1+F_1(p)\cdot F_2(p)}\cdot R(p)$$

On choisit d'étudier le comportement pour une perturbation constante $r(t) = R_0\cdot\mathscr{H}(t)$ soit dans le domaine de Laplace $R(p) = \dfrac{R_0}{p}$

L'erreur relative à la perturbation s'écrit donc :

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1+F_1(p)\cdot F_2(p)}\cdot\frac{R_0}{p}$$

en remplaçant $F_1(p)$ et $F_2(p)$:

$$\varepsilon_p(p) = -\frac{K_2\cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2}\cdot D_2(p)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{K_1\cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1}\cdot D_1(p)}\cdot\dfrac{K_2\cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2}\cdot D_2(p)}}\cdot\frac{R_0}{p}$$
$$\varepsilon_p(p) = -\frac{K_2\cdot N_2(p)\cdot p^{\alpha_1}\cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1}\cdot D_1(p)\cdot p^{\alpha_2}\cdot D_2(p) + K_1\cdot N_1(p)\cdot K_2\cdot N_2(p)}\cdot\frac{R_0}{p}$$

Nous supposons comme dans l'étude précédente que le système est stable, il est donc possible d'utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'écart statique dépendant de la perturbation.

$$\varepsilon_p = \lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t)) = \lim_{p\to 0}(p\cdot\varepsilon_p(p))$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left(-p\cdot\frac{K_2\cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1}\cdot p^{\alpha_2}+K_1\cdot K_2}\cdot\frac{R_0}{p}\right)$$

avec $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

On constate que l'erreur relative à la perturbation dépend principalement de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation α_1 .

On distingue deux cas :

$\alpha_1 = 0$: La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

— si $\alpha_2 = 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$

— si $\alpha_2 > 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0}{K_1}$$

L'erreur statique relative à la perturbation est non nulle dans les deux cas.

$\alpha_1 > 0$: La fonction de transfert $F_1(p)$ en amont de la perturbation possède au moins une intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} \left(-R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = 0$$

L'erreur statique relative à la perturbation est nulle à l'infini.

En conclusion : pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

5.2 Rapidité

5.2.1 Temps de réponse - Temps de montée

Temps de réponse à 5% : c'est le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à 5 % près.

Temps de montée : c'est le temps mis par la sortie pour passer de 10 % à 90 % (ou de 20% à 80%) de la valeur finale.

Évaluer la rapidité d'un système revient en général à déterminer le temps de réponse à 5 % ($T_{5\%}$) pour une entrée de type échelon. Si on sait évaluer cette quantité pour les systèmes du premier ordre ($T_{5\%} = 3\tau$) et du second ordre (Cf. abaque en annexe), pour des systèmes d'un ordre supérieur, il n'existe pas de relation directement applicable.

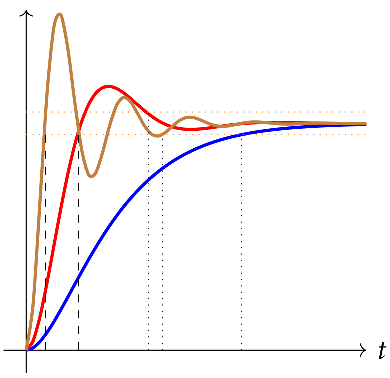


FIGURE 5.2 – Temps de réponse et temps de montée

Le temps de montée peut lui aussi permettre d'évaluer la rapidité du système mais cette mesure ne prend pas en compte les oscillations de la réponse (figure 5.2). On remarque, que des systèmes ayant un temps de réponse analogue peuvent avoir des temps de montée notablement différents.

5.2.2 Temps de montée et bande passante

Un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est-à-dire un système linéaire qui ne « laisse passer » que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées.

On caractérise les filtres par la bande passante à $-3dB$.

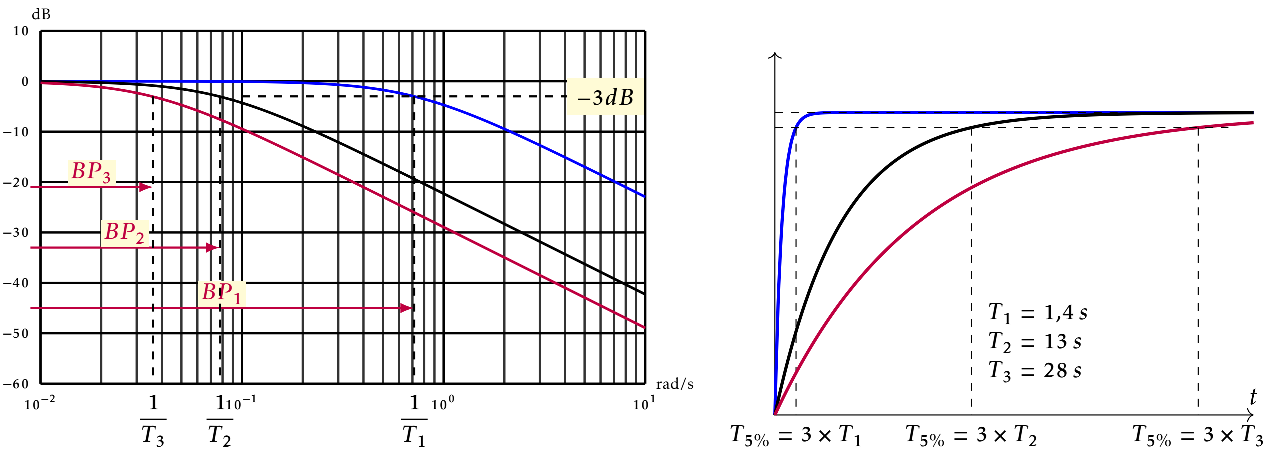
On se propose de montrer que la bande passante et le temps de montée sont corrélés, plus la bande passante de la FTBF est importante, plus le temps de montée est faible.

Cette relation est déjà connue pour les systèmes du premier ordre ; en effet, pour un système en boucle fermée dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K}{1+\tau\cdot p}$$

Alors on sait que :

- le temps de réponse à 5 % est : $T_{5\%} = 3\cdot\tau$
- la bande passante à $-3\,dB$ est : $\omega_c = \dfrac{1}{\tau}$



(a) Diagramme d'amplitude - Bande passante

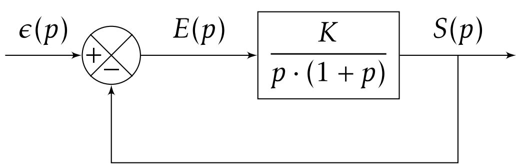
(b) Temps de montée

FIGURE 5.3 – Bande passante et temps de réponse d'un premier ordre

On constate bien que, plus la bande passante augmente, plus le temps de réponse diminue.

Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, nous nous limiterons donc à montrer sans démonstration que pour un système du second ordre, la relation entre la bande passante et le temps de montée est de même nature.

Pour l'évaluer, nous allons étudier le cas du système du second ordre à retour unitaire ci-dessous.



La FTBF s'écrit :

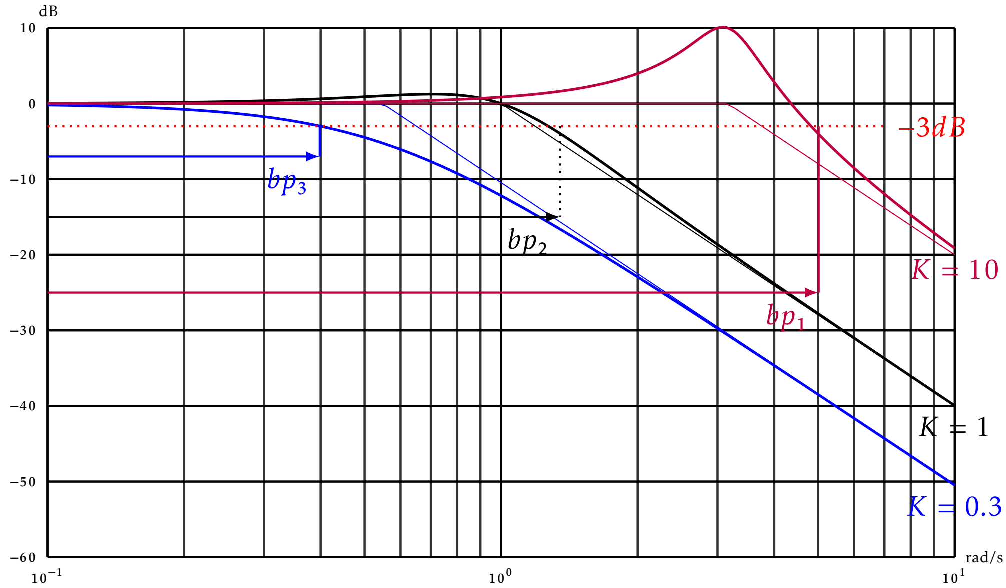
$$BF(p) = \frac{1}{1+\frac{p}{K}+\frac{p^2}{K}}$$

Par identification avec la forme canonique on obtient :

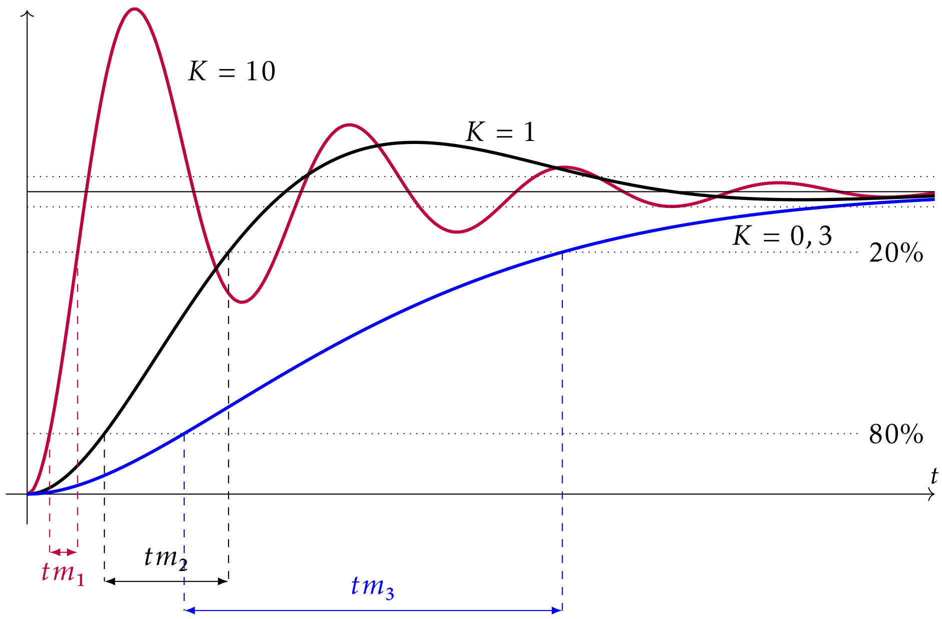
- $\omega_n = \sqrt{k}$, la pulsation propre ;
- $z = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{K}}$, le coefficient d'amortissement.

On constate que la réponse temporelle (fig. 5.4b) et la réponse fréquentielle (fig. 5.4a) dépendent principalement de K ; plus K est grand, plus la réponse est tonique, le temps de montée diminue mais les oscillations augmentent et plus la bande passante est grande.

Remarque : Sur la figure 5.4b est représenté le temps de montée de 20% à 80%.



(a) Diagramme d'amplitude - Bande passante



(b) Temps de montée

Figure 5.4 – Bande passante et temps de montée

On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de montée du système, il faut augmenter la bande passante mais ne faut oublier que le temps de montée et le temps de réponse ne sont pas directement corrélés.