

## 6.5 Précision

### 6.5.1 Position du problème

La précision est une caractéristique prépondérante d'un système asservi ou d'une régulation. La précision est évaluée aussi bien vis-à-vis de l'entrée de consigne que vis-à-vis des perturbations. Un système doit être précis relativement à l'entrée en étant insensible aux perturbations. Les perturbations ne doivent pas dégrader la précision de la réponse finale.

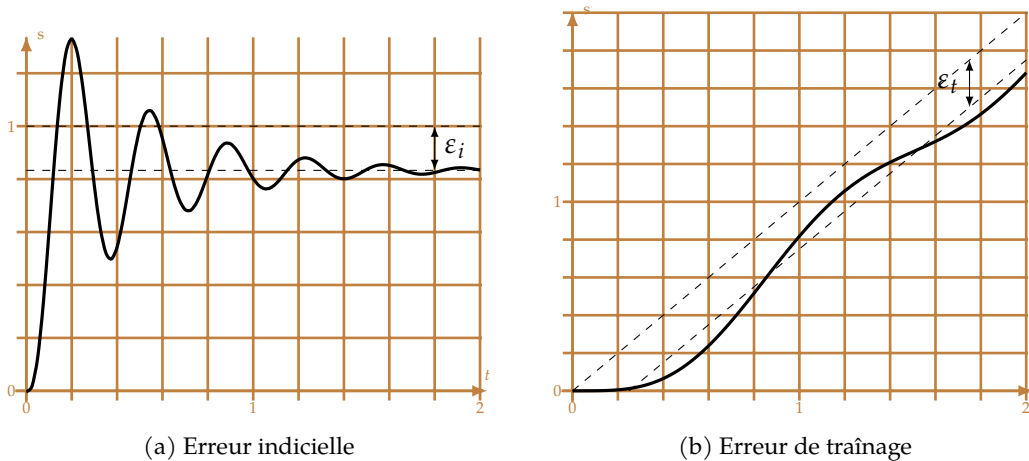


FIGURE 6.23 – Erreur statique

On distingue :

**L'erreur statique :** C'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques :

- Échelon, on parle alors d'*erreur indicielle* (figure 6.23a).
- Rampe, *erreur de traînage* ou erreur de poursuite (figure 6.23b).
- Accélération, erreur en accélération.

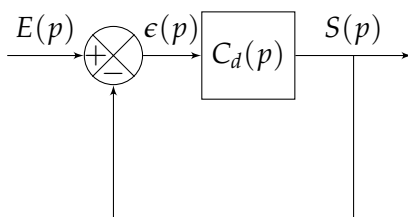
**L'erreur dynamique :** C'est l'écart instantané entre la sortie et l'entrée lors de la phase transitoire suivant l'application de l'entrée ou après une perturbation (hors du programme).

### 6.5.2 Données

La précision est évaluée par l'écart  $\varepsilon(t)$  mesuré pour un système à retour unitaire entre  $e(t)$  et  $s(t)$ . Dans le cas d'un système à retour non unitaire il se mesure entre  $e(t)$  et  $m(t)$ , avec  $m(t)$  la mesure de  $s(t)$ .

Déterminons dans les deux cas l'erreur  $\varepsilon(t)$  (pour une perturbation nulle).

#### a ) Cas du retour unitaire



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$$

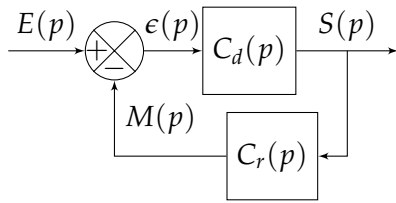
$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{1 + C_d(p)} \right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p)$$

## b ) Cas du retour non unitaire



$$\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - C_d(p) \cdot C_r(p) \cdot \varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \left( \frac{1}{1 + C_d(p) \cdot C_r(p)} \right) E(p)$$

avec ici :

$$BO(p) = C_d(p) \cdot C_r(p)$$

soit finalement dans les deux cas :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + BO(p)} E(p)$$

L'erreur dépend de la FTBO et de la nature de l'entrée.

Pour la suite, nous ne traiterons que le cas de système à retour unitaire, l'étude étant identique pour les systèmes à retour non unitaire.

Nous nous placerons dans le cas général pour lequel la FTBO peut être mise sous la forme :

$$BO(p) = \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}$$

—  $K > 0$  : le gain,—  $N(p)$  : polynôme de degré  $n$  avec  $N(0) = 1$ ,—  $\alpha \geq 0$  : la classe du système,—  $D(p)$  : polynôme de degré  $m$  avec  $D(0) = 1$ .

**Remarque :** Pour un système physique le degré du dénominateur  $m + \alpha > n$ .

## 6.5.3 Erreur en régime permanent - Erreur statique

## a ) Définition

L'écart en régime permanent est la limite quand  $t$  tend vers l'infini de l'écart entre  $e(t)$  et  $s(t)$  :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$$

Un système sera précis si cet écart tend vers 0.

## b ) Calculs préalables

Le théorème de la valeur finale permet d'écrire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p))$$

**Remarque importante :** Ce théorème ne peut-être utilisé que si la sortie converge, c'est-à-dire si le système est stable. Nous supposons donc pour la suite que le système est stable.

Ici on peut donc écrire pour l'écart :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + BO(p)} E(p) = \frac{1}{1 + \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha \cdot D(p)}} E(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} E(p)$$

d'où pour l'erreur statique

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( p \frac{p^\alpha \cdot D(p)}{p^\alpha \cdot D(p) + K \cdot N(p)} E(p) \right)$$

Finalement en se rappelant que :  $N(0) = 1$  et  $D(0) = 1$  :

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

En conclusion, l'erreur statique dépend de la nature de l'entrée  $E(p)$  et de la classe  $\alpha$  de la fonction de transfert en boucle ouverte et du gain  $K$  de la FTBO.

### c ) Erreur indicielle - Réponse à un échelon

On nomme erreur indicielle  $\varepsilon_i$ , l'erreur statique relative à une entrée en échelon  $e(t) = E_0 \cdot \mathcal{H}(t)$  avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside.

Le système étant stable (par hypothèse) on peut écrire :

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

avec  $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} \frac{E_0}{p} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 \right)$$

On peut considérer deux cas en fonction de la classe du système.

**Système de classe 0 ( $\alpha = 0$ ) :** La FTBO ne comporte pas d'intégration

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^0}{p^0 + K} E_0 \right) = \frac{1}{1 + K} E_0$$

L'erreur est non nulle et dépend du gain  $K$  de la FTBO, elle est d'autant plus petite que le gain est important.

**Système de classe  $> 0$  ( $\alpha > 0$ ) :** La FTBO comporte au moins une intégration dans la boucle

$$\varepsilon_i = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^\alpha}{p^\alpha + K} E_0 \right) = 0$$

L'erreur est donc nulle à l'infini quel que soit le gain  $K$  de la FTBO.

**Remarque :** Par abus de langage on appelle souvent erreur statique, l'erreur indicielle.

### d ) Erreur de traînage - Réponse à une rampe

L'erreur de traînage (aussi nommée erreur de poursuite)  $\varepsilon_t$ , est l'erreur mesurée entre une entrée de type rampe  $e(t) = A_0 \cdot t \cdot \mathcal{H}(t)$  et la sortie.

Comme précédemment

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha + K} E(p) \right)$$

## 6.5 Précision

avec  $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{A_0}{p^2}$

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1} A_0}{p^\alpha + K} \frac{1}{p^2} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right)$$

L'erreur de traînage dépend comme l'erreur indicielle du gain  $K$  et de la classe du système. Nous pouvons distinguer trois cas.

**Système de classe 0 ( $\alpha = 0$ ) :** La FTBO ne comporte pas d'intégration.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( A_0 \cdot \frac{p^{-1}}{p^0 + K} \right) = +\infty$$

L'écart tend vers  $+\infty$ , la réponse temporelle de la sortie s'écarte de la consigne en rampe.

**Système de classe 1 ( $\alpha = 1$ ) :** La FTBO comporte une intégration

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( A_0 \cdot \frac{p^0}{p^1 + K} \right) = \frac{A_0}{K}$$

L'erreur est constante, la sortie est parallèle à l'entrée, décalée de  $\varepsilon_t$ .

**Système de classe  $> 1$  ( $\alpha > 1$ ) :** La FTBO comporte au moins deux intégrations.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} \left( A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

L'erreur de traînage est nulle, la sortie rattrape l'entrée lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

### e ) Erreur en accélération - Réponse à une consigne parabolique

On se propose maintenant de déterminer l'erreur en accélération,  $\varepsilon_a$ , correspondant à une entrée de type parabolique  $e(t) = A_0 \cdot t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$ .

Comme dans les études précédentes avec  $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p) = \frac{2 \cdot A_0}{p^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left( \frac{p^{\alpha+1} A_0}{p^\alpha + K} \frac{2 \cdot p^3}{p^3} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right)$$

En fonction de  $\alpha$  on obtient :

**Système de classe  $< 2$  ( $0 < \alpha < 2$ )**

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = +\infty$$

**Système de classe 2 ( $\alpha = 2$ )**

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^0}{p^2 + K} \right) = \frac{2 \cdot A_0}{K}$$

**Système de classe  $> 2$  ( $\alpha > 2$ )**

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \left( 2 \cdot A_0 \cdot \frac{p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K} \right) = 0$$

## f ) Tableau récapitulatif

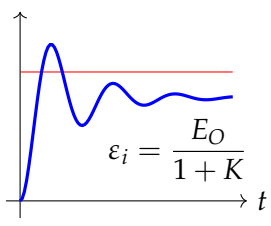
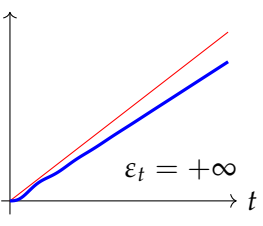
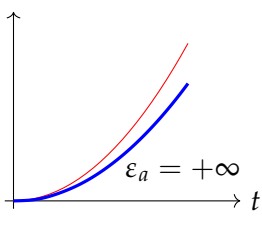
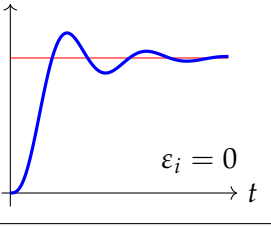
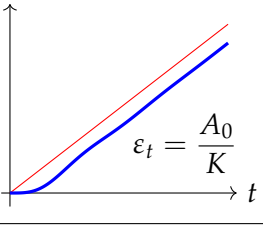
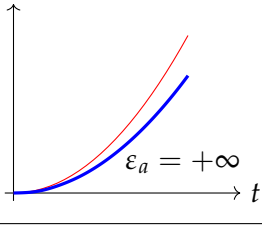
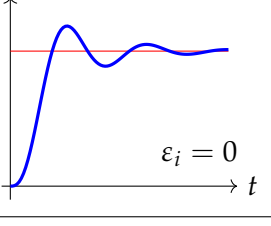
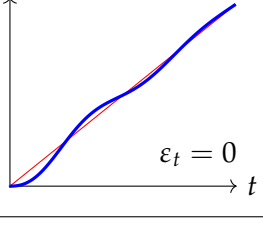
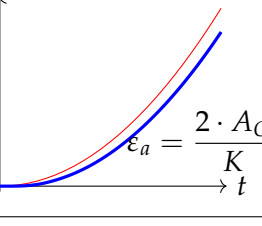
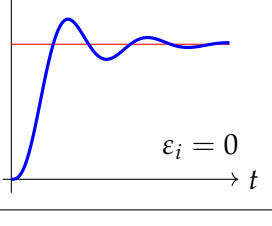
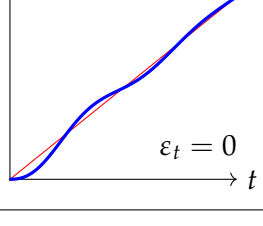
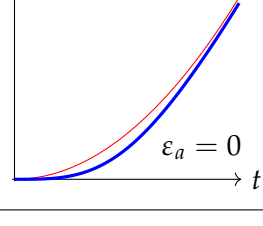
Classe	Échelon	Rampe	Accélération
$\alpha = 0$	 $\varepsilon_i = \frac{E_O}{1 + K}$	 $\varepsilon_t = +\infty$	 $\varepsilon_a = +\infty$
$\alpha = 1$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = \frac{A_0}{K}$	 $\varepsilon_a = +\infty$
$\alpha = 2$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = 0$	 $\varepsilon_a = \frac{2 \cdot A_0}{K}$
$\alpha > 2$	 $\varepsilon_i = 0$	 $\varepsilon_t = 0$	 $\varepsilon_a = 0$

TABLE 6.1 – Tableau récapitulatif : influence de la classe sur l'erreur statique

Le tableau de la présente page récapitule les différentes erreurs et l'allure des réponses temporelles correspondantes.

Il ne faut pas déduire rapidement du tableau 6.1 qu'il suffit de corriger le système en rajoutant une intégration pour que le système soit précis, en effet chaque intégration ajoute aussi un déphasage de  $-90^\circ$ , le système risque donc de devenir instable. Ce tableau n'a de sens que si le système est stable !

### 6.5.4 Effet d'une perturbation sur la précision

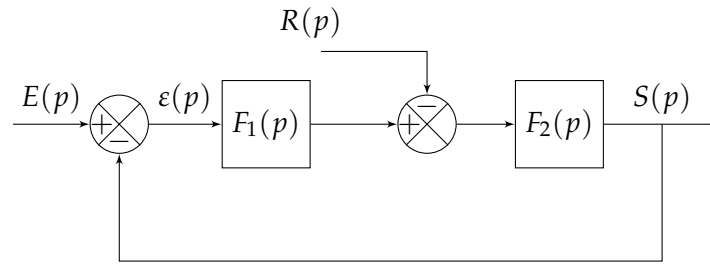
#### a ) Présentation du problème

On se propose d'étudier l'effet d'une perturbation sur la précision d'un système et l'influence de la forme de la fonction de transfert sur l'impact de cette perturbation.

À partir du modèle d'étude décrit par le schéma blocs et les fonctions de transfert suivants :

$$F_1(p) = \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \text{ et } F_2(p) = \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}$$

avec  $N_1(0) = D_1(0) = 1$ ,  $N_2(0) = D_2(0) = 1$ ,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$ .



Déterminons l'écart  $\epsilon(t)$

$$\begin{aligned}\epsilon(p) &= E(p) - S(p) = E(p) - F_2(p) \cdot (F_1(p) \cdot \epsilon(p)) - R(p) \\ \epsilon(p) &= \frac{1}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot E(p) - \frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)\end{aligned}$$

L'erreur due à la perturbation s'ajoute à celle relative à l'entrée (résultat général que l'on retrouve par le théorème de superposition appliqué aux systèmes linéaires).

Nous limiterons notre étude au cas d'une perturbation constante, les autres types de perturbations se traitant de la même manière.

## b ) Perturbation constante

À partir du théorème de superposition, on sait que la réponse obtenue pour un système linéaire à deux entrées est la somme des sorties de chaque entrée prise isolément.

Pour étudier l'effet de la perturbation seule, il suffit de poser  $e(t) = 0$ . On en déduit l'écart relatif à la perturbation :

$$\epsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot R(p)$$

On choisit d'étudier le comportement pour une perturbation constante  $r(t) = R_0 \cdot \mathcal{H}(t)$  soit dans le domaine de Laplace  $R(p) = \frac{R_0}{p}$

L'erreur relative à la perturbation s'écrit donc :

$$\epsilon_p(p) = -\frac{F_2(p)}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}$$

en remplaçant  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  :

$$\begin{aligned}\epsilon_p(p) &= -\frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_1 \cdot N_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)} \cdot \frac{K_2 \cdot N_2(p)}{p^{\alpha_2} \cdot D_2(p)}} \cdot \frac{R_0}{p} \\ \epsilon_p(p) &= -\frac{K_2 \cdot N_2(p) \cdot p^{\alpha_1} \cdot D_1(p)}{p^{\alpha_1} \cdot D_1(p) \cdot p^{\alpha_2} \cdot D_2(p) + K_1 \cdot N_1(p) \cdot K_2 \cdot N_2(p)} \cdot \frac{R_0}{p}\end{aligned}$$

Nous supposons comme dans l'étude précédente que le système est stable, il est donc possible d'utiliser le théorème de la valeur finale pour déterminer l'écart statique dépendant de la perturbation.

$$\epsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\epsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (p \cdot \epsilon_p(p))$$

avec  $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\epsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -p \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1} \cdot p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \cdot \frac{R_0}{p} \right)$$

avec  $N_i(0) = D_i(0) = 1$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

On constate que l'erreur relative à la perturbation dépend principalement de la classe de la fonction de transfert en amont de la perturbation  $\alpha_1$ .

On distingue deux cas :

$\alpha_1 = 0$  : La fonction de transfert  $F_1(p)$  en amont de la perturbation ne possède pas d'intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right)$$

— si  $\alpha_2 = 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^0 + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0 \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$$

— si  $\alpha_2 > 0$

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^0}{p^{\alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = -\frac{R_0}{K_1}$$

L'erreur statique relative à la perturbation est non nulle dans les deux cas.

$\alpha_1 > 0$  : La fonction de transfert  $F_1(p)$  en amont de la perturbation possède au moins une intégration.

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \left( -R_0 \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2} \right) = 0$$

L'erreur statique relative à la perturbation est nulle à l'infini.

En conclusion : pour que l'erreur permanente ne dépende pas de la perturbation, il faut au moins une intégration en amont de la perturbation.

## 6.6 Rapidité

### 6.6.1 Temps de réponse - Temps de montée

**Temps de réponse à 5% :** c'est le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale à 5 % près.

**Temps de montée :** c'est le temps mis par la sortie pour passer de 10 % à 90 % (ou de 20% à 80%) de la valeur finale.

Évaluer la rapidité d'un système revient en général à déterminer le temps de réponse à 5 % ( $T_{5\%}$ ) pour une entrée de type échelon. Si on sait évaluer cette quantité pour les systèmes du premier ordre ( $T_{5\%} = 3\tau$ ) et du second ordre (Cf. abaque en annexe), pour des systèmes d'un ordre supérieur, il n'existe pas de relation directement applicable.

Le temps de montée peut lui aussi permettre d'évaluer la rapidité du système mais cette mesure ne prend pas en compte les oscillations de la réponse (figure 6.24). On remarque, que des systèmes ayant un temps de réponse analogue peuvent avoir des temps de montée notablement différents.

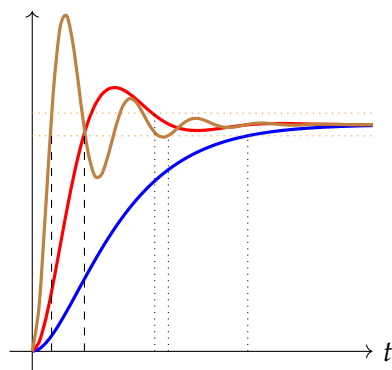


FIGURE 6.24 – Temps de réponse et temps de montée

### 6.6.2 Temps de montée et bande passante

Un système asservi se comporte comme un filtre passe-bas, c'est-à-dire un système linéaire qui ne « laisse passer » que les basses fréquences, les hautes fréquences sont fortement atténuées.

On caractérise les filtres par la bande passante à  $-3\text{dB}$ .

On se propose de montrer que la bande passante et le temps de montée sont corrélés, plus la bande passante de la FTBF est importante, plus le temps de montée est faible.

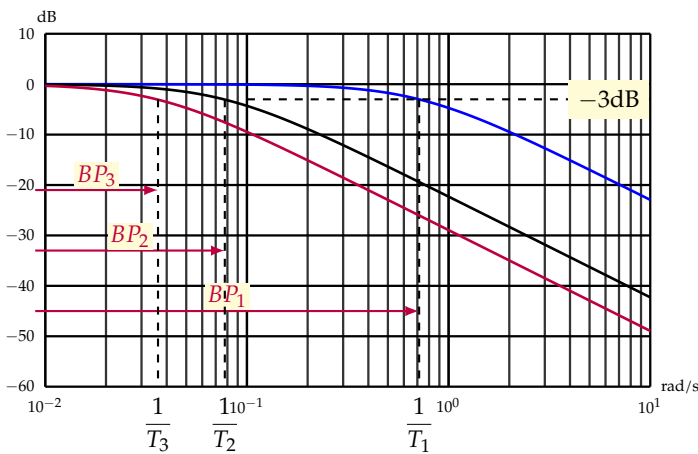
Cette relation est déjà connue pour les systèmes du premier ordre; en effet, pour un système en boucle fermée dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H_1(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

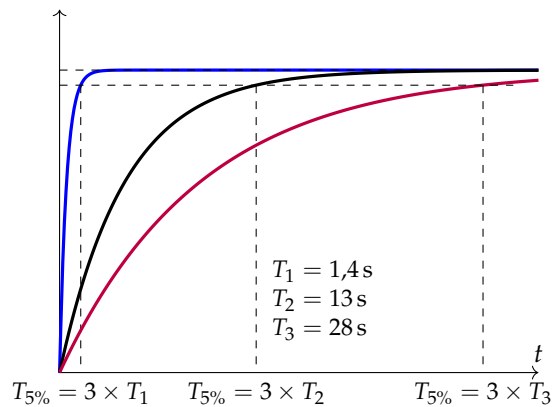
Alors on sait que :

— le temps de réponse à 5 % est :  $T_{5\%} = 3 \cdot \tau$

— la bande passante à  $-3\text{dB}$  est :  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$



(a) Diagramme d'amplitude - Bande passante



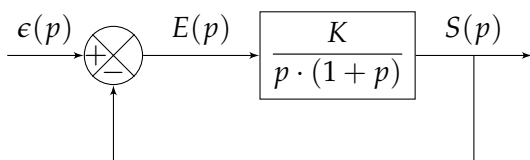
(b) Temps de montée

FIGURE 6.25 – Bande passante et temps de réponse d'un premier ordre

On constate bien que, plus la bande passante augmente, plus le temps de réponse diminue.

Dans les autres cas, les calculs sont plus complexes, nous nous limiterons donc à montrer sans démonstration que pour un système du second ordre, la relation entre la bande passante et le temps de montée est de même nature.

Pour l'évaluer, nous allons étudier le cas du système du second ordre à retour unitaire ci-dessous.



La FTBF s'écrit :

$$BF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K} + \frac{p^2}{K}}$$

Par identification avec la forme canonique on obtient :

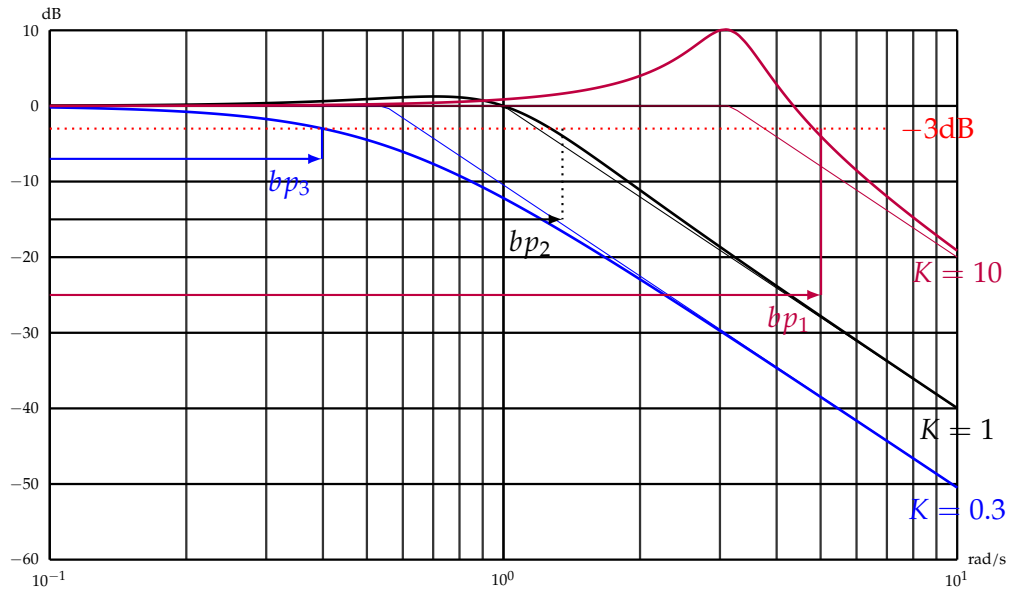
—  $\omega_n = \sqrt{k}$ , la pulsation propre;

—  $z = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{K}}$ , le coefficient d'amortissement.

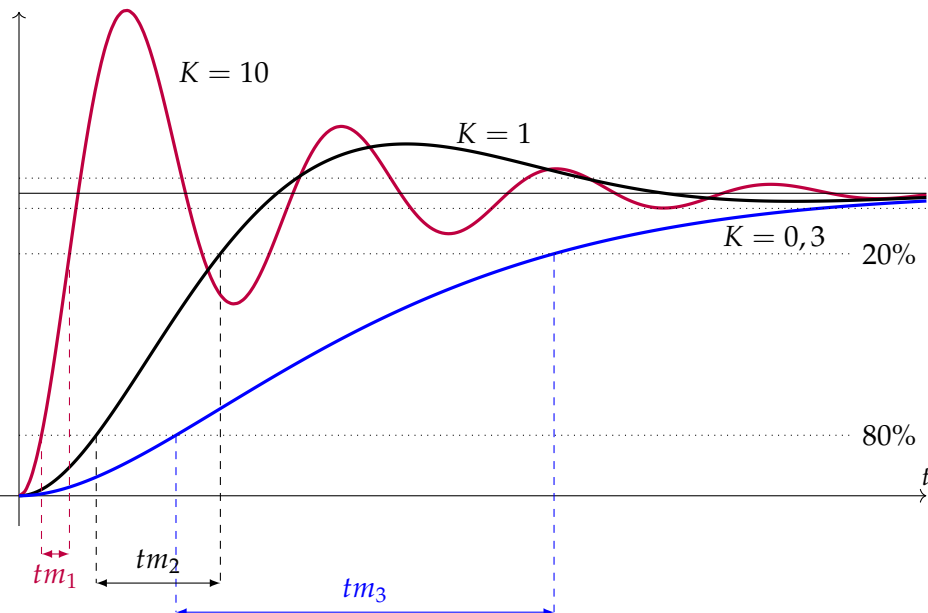
On constate que la réponse temporelle (fig. 6.26b) et la réponse fréquentielle (fig. 6.26a) dépendent principalement de  $K$ ; plus  $K$  est grand, plus la réponse est tonique, le temps de montée diminue mais les oscillations augmentent et plus la bande passante est grande.



**Remarque :** Sur la figure 6.26b est représenté le temps de montée de 20% à 80%.



(a) Diagramme d'amplitude - Bande passante



(b) Temps de montée

FIGURE 6.26 – Bande passante et temps de montée

On peut tenter de généraliser en disant que si l'on souhaite diminuer le temps de montée du système, il faut augmenter la bande passante mais ne faut oublier que le temps de montée et le temps de réponse ne sont pas directement corrélés.

## 6.7 Feuille de travaux dirigés n°6b

### Exercice 4 - Régulation d'une turbine

Adapté de Centrale 2011 PSI

Corrigé page 44

Le fonctionnement d'une turbine de centrale électrique peut être modélisé autour de son point de fonctionnement par le schéma-bloc de la figure 6.27.

On retrouve sur ce schéma, deux boucles imbriquées :

- la boucle intérieure est la boucle de régulation de puissance,
- la boucle extérieure, la boucle de régulation de la fréquence du réseau.

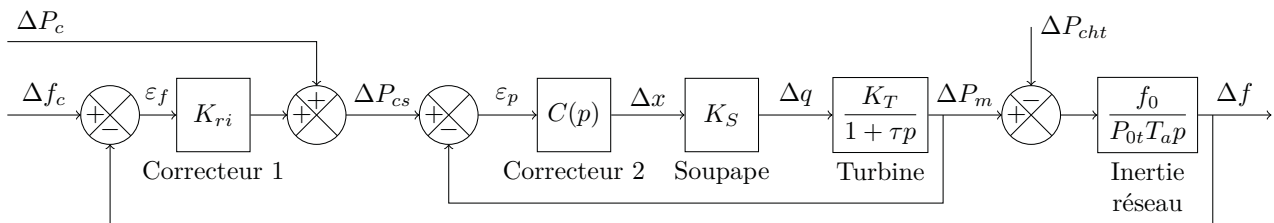


FIGURE 6.27 – Schéma bloc de la régulation en puissance et fréquence d'une turbine à vapeur

Les variables  $\Delta f_c$ ,  $\Delta P_c$ ,  $\Delta P_{cht}$  et  $\Delta f$  représentent les variations autour du point de linéarisation du fonctionnement,  $f_c$  est la consigne de fréquence  $f_0 = 50$  Hz,  $f$  la fréquence effective sur le réseau,  $P_c$  la consigne de puissance en W et  $P_{cht}$  la puissance effective consommée par les utilisateurs.

Cahier des charges pour la régulation de chaque machine, dont un extrait est donné tableau 6.2.

Exigence	Critère	Niveau
Réguler la puissance produite	Stabilité	Stable
	Précision	Erreur nulle en réponse à un échelon de puissance
Participer à la régulation de fréquence	Stabilité	$M_G > 10$ dB et $M_\phi > 20^\circ$
	Précision	Erreur nulle en réponse à un échelon de fréquence
	Rapidité	Temps de réponse à un échelon : $t_{r5\%} = 40$ s
	Sensibilité aux perturbations de charge	Sensible aux perturbations constantes, de façon à respecter un statisme de 4%

TABLE 6.2 – Cahier des charges partiel pour un site de production

#### A. Régulation en puissance de la turbine

On s'intéresse dans un premier temps à la régulation en puissance de la turbine (boucle intérieure).

On donne :  $K_S = 2,5 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $K_T = 1,34 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $P_{0t} = 260 \text{ MW}$  et  $\tau = 6 \text{ s}$ .

On adopte dans un premier temps un correcteur intégral pur, dont la fonction de transfert s'écrit :

$$C(p) = \frac{K_I}{p}$$

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $H_P(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Déterminer l'expression littérale et numérique de  $K_I$  minimisant le temps de réponse à 5% de la boucle interne de régulation

de puissance. En déduire ce temps de réponse à 5%. En comparant à la rapidité de la turbine seule, la boucle interne de régulation améliore-t-elle la rapidité ?

On choisit désormais un correcteur proportionnel-intégral dont la fonction de transfert s'écrit sous la forme  $C(p) = K_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$ .

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert

$$H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$$

sous forme canonique et déterminer, en justifiant votre réponse, si cette boucle de régulation est stable et précise. Que peut-on dire du temps de réponse ?

**Q3.** Conclure par une synthèse, des avantages et inconvénients d'un fonctionnement en boucle ouverte, en boucle fermée avec correction proportionnelle, en boucle fermée avec correction intégrale et en boucle fermée avec correction proportionnelle intégrale, sur les critères de précision, rapidité et stabilité de la régulation en puissance.

Le coefficient de correction proportionnelle  $K_p$  doit satisfaire la condition  $K_p \cdot K_S \cdot K_T = 1$  pour ne pas dégrader la durée de vie des turbines. De même, nous verrons par la suite que  $T_i$  doit rester voisin de  $\tau$ .

**Q4.** Montrer que dans ces conditions, la fonction de transfert  $H_p(p)$  peut être approchée par une fonction de transfert simplifiée dont on précisera les paramètres.

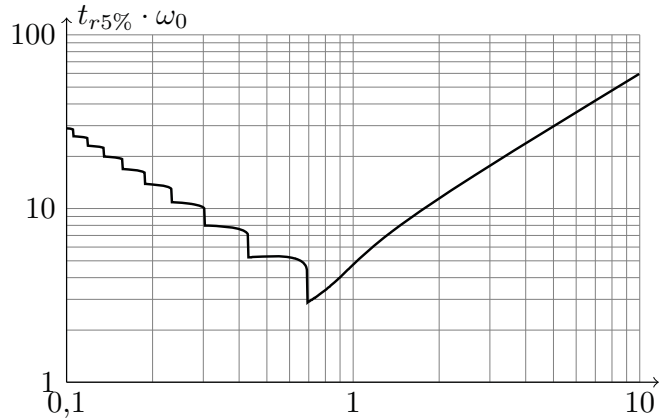


FIGURE 6.28 – Abaque de  $T_{5\%} \cdot \omega_n$  en fonction du coefficient d'amortissement

## B. Régulation complète de la turbine

On s'intéresse dans cette partie à la régulation complète (figure 6.27).

On admet que la fonction de transfert  $H_p(p) = \frac{\Delta P_m(p)}{\Delta P_{cs}(p)}$  s'écrit sous la forme :

$$H_p(p) = \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot \tau \cdot p^2 + 2 \cdot T_i \cdot p + 1}$$

On donne les constantes  $T_a = 10$  s et  $K_{ri} = 10^8$  W · s.

**Q5.** Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte  $H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)}$  pour  $\Delta P_c(p)$  et  $\Delta P_{cht}$  nuls.

Sur la figure 6.29 sont tracés les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte pour  $T_i = 10 \cdot \tau$  et  $T_i = 0,1 \cdot \tau$ .

**Q6.** Pour ces deux fonctions de transfert, placer sur les diagrammes :

**Q6a.** Préciser la légende.

**Q6b.** Placer les pulsations  $\frac{1}{\tau}$ ,  $\frac{1}{T_i}$  et  $\frac{1}{\sqrt{T_i \cdot \tau}}$ .

**Q6c.** Est-il préférable de régler  $T_i > \tau$  ou  $T_i < \tau$  ?

On considère que  $T_i = 20$  s.

**Q7.** Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques de  $H_{fo}(p) = \frac{\Delta f(p)}{\varepsilon_f(p)}$ .

**Q8.** En assimilant le tracé de Bode réel du gain à son asymptote, calculer la marge de phase. Conclure sur les critères de stabilité et de précision du cahier des charges.

En utilisant l'expression approchée :  $H_p(p) = \frac{1}{1 + 6 \cdot p}$  vue plus haut

**Q9.** Déterminer la FTBO approchée.

**Q10.** Superposer aux diagrammes asymptotiques précédents les diagrammes réels et asymptotiques. Le modèle approché est-il valide ?

**Q11.** Vérifier alors le critère de rapidité du cahier des charges.

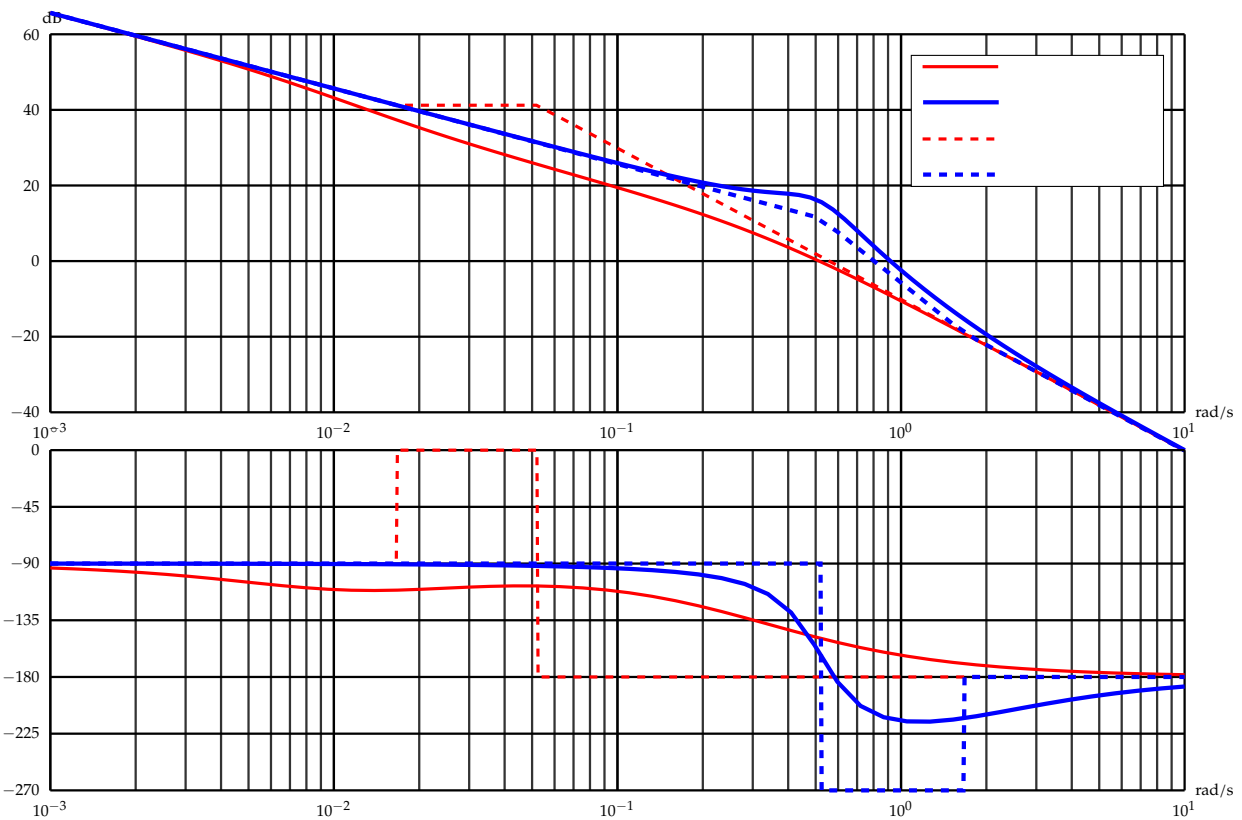
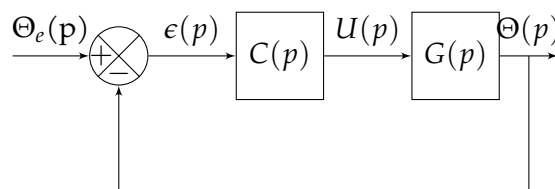


FIGURE 6.29 – Diagrammes de bode de la FTBO pour  $T_i = 10 \cdot \tau$  et  $T_i = 0,1 \cdot \tau$

### Exercice 5 - Précision et paramètres

Corrigé page 47

Le système étudié est un réacteur, dont on se propose de réguler la température.



L'équation différentielle reliant la température  $\theta(t)$  à la tension de commande  $u(t)$  s'écrit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (4 + \alpha) \cdot \frac{d\theta}{dt} + 4 \cdot \alpha \cdot \theta(t) = 4 \cdot u(t)$$

Le paramètre  $\alpha$  a été identifié par plusieurs essais mais sa valeur, dépendante aux produits introduits dans le réacteur, n'est connue que par un encadrement :  $16 \leq \alpha \leq 20$ .

La régulation complète est représentée par le schéma bloc ci-dessus.

- $\Theta_e(p)$  : la transformée de Laplace de la température de consigne  $\theta_e(t)$  ;
- $\Theta(p)$  et  $U(p)$  les transformées de Laplace de  $\theta(t)$  et  $u(t)$  ;
- $C(p)$  : le régulateur.

Dans un premier temps, on choisit un régulateur proportionnel :  $C(p) = K_p$ .

**Q1.** Déterminer la fonction de transfert  $G(p)$ .

**Q2.** Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée  $G_F(p) = \frac{\Theta(p)}{\Theta_e(p)}$ . Mettre sous forme canonique.

Q3. Le système est-il stable ?

Q4. Déterminer  $K_p$  pour obtenir un coefficient d'amortissement  $z_F > 0,5$ .

Q5. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de  $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$  en fonction du paramètre  $\alpha$ . Conclure sur la précision.

On choisit maintenant un régulateur proportionnel intégral :  $C(p) = K_p \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$ .

Q6. Déterminer la FTBO pour les valeurs suivantes de  $T_i$  et  $\alpha$  ;

—  $T_i = 1/20, T_i = 1/16$

—  $\alpha = 20, \alpha = 16$

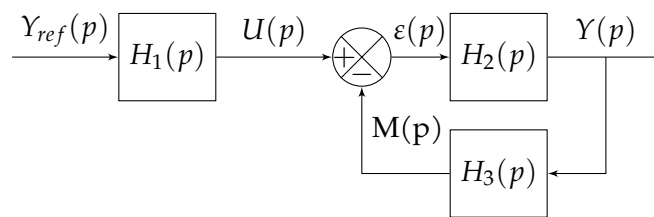
Q7. À partir du tracé des diagrammes de Bode de la FTBO pour chacun des cas (on prend  $K_p = 1$ ), déterminer le couple  $(T_i, K_p)$  tel que la marge de phase ( $M_p$ ) soit supérieure à  $45^\circ$  pour toutes les valeurs de  $\alpha$ .

Q8. Déterminer l'erreur indicielle pour un échelon de température de  $\Theta_0 = 20^\circ\text{C}$ .

### Exercice 6 - Précision et stabilité

Corrigé page 48

Soit le système décrit par le schéma bloc :



$$H_1(p) = \frac{5}{(1 + 16 \cdot p) \cdot (1 + 33 \cdot p)} \quad H_2(p) = \frac{15 \cdot k}{p(1 + p)} \quad H_3(p) = \frac{1}{1 + 0.1 \cdot p}$$

$y_{ref}(t) = Y_0$  est une consigne constante (échelon).

Q1. Déterminer la fonction de transfert  $O(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$  puis  $F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ .

Q2. Déterminer la fonction de transfert  $G(p) = \frac{Y(p)}{Y_{ref}(p)}$ .

Q3. Déterminer la valeur finale de  $Y(t)$  pour  $k = 0,1, k = 0,5, k = 1$  et  $k = 5$ .

### Exercice 7 - Exosquelette pour le maniement de charges

Extrait de CCS TSI 2017

Corrigé page 49

L'exosquelette est un appareil qui apporte à un être humain des capacités qu'il ne possède pas ou qu'il a perdues à cause d'un accident. Ce type d'appareil peut permettre à une personne de soulever des charges lourdes et diminuer considérablement les efforts à fournir sans la moindre fatigue (figure 6.30).

La demande de mouvement de l'utilisateur de l'exosquelette se traduit par une consigne de vitesse de type trapézoïdal pour le mouvement vertical. À l'aide du modèle articulaire inverse cette demande se traduit finalement en consigne de position des axes moteur genou gauche et droit. Cette consigne de position du moteur représentée figure 6.31 montre des parties qui peuvent être approchées par des constantes, des rampes et des paraboles.

Afin de s'assurer de minimiser l'erreur par rapport à cette consigne, on montre que cela revient à respecter une précision à la fois pour un échelon, une rampe et une accélération.

Le cahier des charges est décrit ci-dessous :

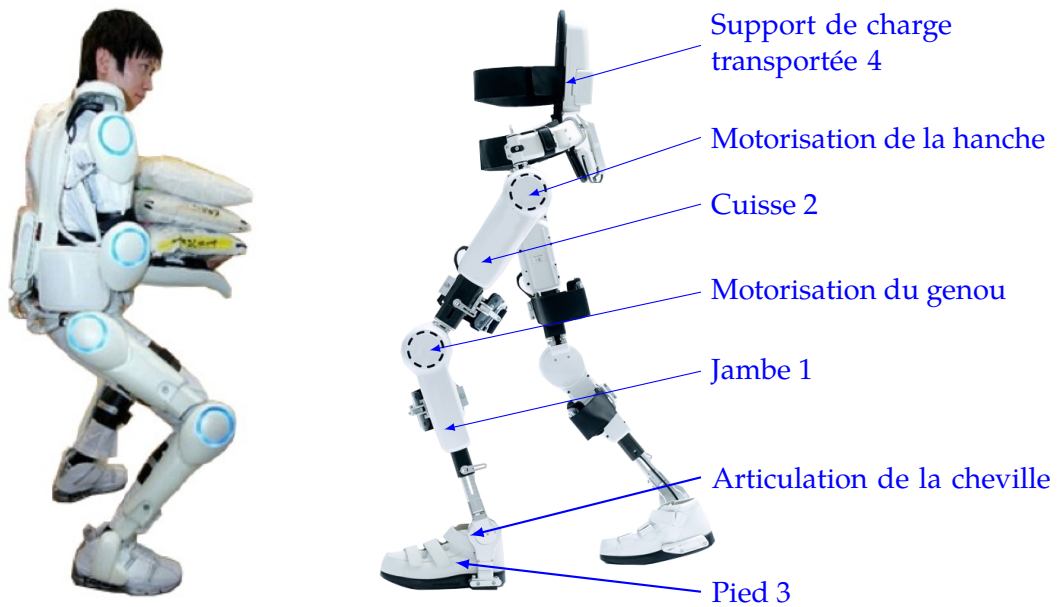


FIGURE 6.30 – Exosquelette

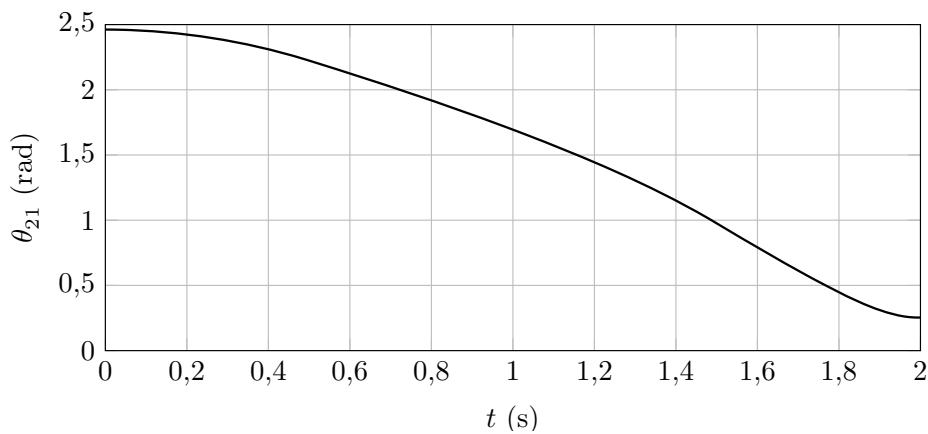


FIGURE 6.31 – Évolution de la consigne moteur

Exigences	Critères d'appréciation	Niveau
Gérer le mouvement	Précision statique de la boucle d'asservissement de position vertical	
	erreur de position	< 1%
	erreur de traînage	< 1%
	erreur d'accélération	< 1%

Selon le cahier des charges, pour assurer une bonne synchronisation des axes, l'exigence de précision statique suite à une entrée de type échelon, de type rampe ou de type accélération doit être inférieure à 1%.

Le premier modèle défini figure 6.32 est adopté pour chaque axe. Les notations utilisées sont précisées dans le tableau 6.3.

Le correcteur de l'asservissement de vitesse est de la forme  $C_{\Omega}(p) = K_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$  avec  $T_i$  réglé afin de compenser le pôle dominant pour la situation correspondant à l'inertie moyenne,  $T_i = \frac{J}{f}$ .

L'écart est défini par la variable  $\varepsilon(t) = \theta_{mC}(t) - \theta_m(t)$ .

La précision statique du système est définie par les paramètres suivants :

— Erreur de position :  $\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = \mathcal{H}(t)$ .

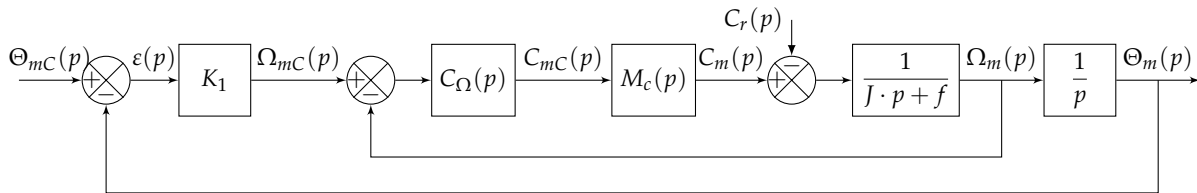


FIGURE 6.32 – Premier modèle

- Erreur de traînage :  $\varepsilon_v = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = t \cdot \mathcal{H}(t)$ .
- Erreur en accélération :  $\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t))$  suite à une entrée de type échelon unitaire  $\theta_{mC}(t) = t^2 \cdot \mathcal{H}(t)$ .

avec  $\mathcal{H}(t)$  la fonction de Heaviside.

On rappelle la transformée de Laplace de  $t^n \cdot \mathcal{H}(t)$  :  $\frac{n}{p^{n+1}}$  pour  $n > 1$ .

$\Theta_{mC}(p)$	consigne de position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_{mC}(t)$ en rad)
$\Theta_m(p)$	position de l'axe moteur (variable temporelle : $\theta_m(t)$ en rad)
$C_{mC}(p)$	consigne de couple moteur (variable temporelle : $C_{mC}(t)$ en N · m)
$C_m(p)$	couple moteur (variable temporelle : $c_m(t)$ en N · m)
$C_r(p)$	couple résistant perturbateur (variable temporelle : $c_r(t)$ en N · m)
$K_1$	gain proportionnel du correcteur de l'asservissement de position (en $s^{-1}$ )
$\Omega_{mC}(p)$	consigne de vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_{mC}(t)$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$ )
$\Omega_m(p)$	vitesse de l'axe moteur (variable temporelle : $\Omega_m(t)$ en $\text{rad} \cdot s^{-1}$ )
$C_\Omega(p)$	correcteur de l'asservissement de vitesse
$M_c(p)$	modélise la boucle d'asservissement en couple de la machine électrique, considérée parfaite au vu de sa dynamique par rapport aux autres boucles : $M_c(p) = 1$
$J$	moment d'inertie de l'ensemble en mouvement, rapporté au niveau de l'axe moteur
$f$	coefficient de frottements visqueux équivalent pour l'ensemble en mouvement

TABLE 6.3 – Notations

On considère dans un premier temps que le couple résistant évolue lentement au regard de la dynamique de l'asservissement, ce qui permet de considérer pour la suite de l'étude  $c_r(t) = 0$ .

**Q1.** Exprimer  $H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)}$  en fonction de  $J$ ,  $K_2$  et  $p$ .

**Q2.** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction de  $\Theta_{mC}(p)$ ,  $H_\Omega(p)$ ,  $K_1$  et  $p$ .

**Q3.** Déterminer l'erreur de position  $\varepsilon_p$  puis l'erreur de traînage  $\varepsilon_v$ . Conclure sur la valeur de  $K_1$  pour satisfaire à l'exigence d'erreur en traînage.

**Q4.** Déterminer l'erreur en accélération  $\varepsilon_a$  et conclure quant au respect du cahier des charges.

Afin de satisfaire l'exigence d'une erreur en accélération inférieure à 1%, on choisit d'installer une correction par anticipation de la vitesse (figure 6.33) est adopté.

Pour cette partie, on prend :  $H_\Omega(p) = \frac{1}{1 + T \cdot p}$  avec  $T = 33$  ms.

**Q5.** Déterminer  $H_{2\Theta}(p) = \frac{\Theta_m(p)}{\Theta_{mC}(p)}$ . La fonction de transfert est-elle stable ?

**Q6.** Exprimer  $\varepsilon(p)$  en fonction  $\Theta_{mC}(p)$ ,  $T$ ,  $K_1$ ,  $K_3$  et  $p$ .

**Q7.** Le modèle par anticipation a-t-il une influence sur l'erreur de position  $\varepsilon_p$  ?

**Q8.** Exprimer l'erreur de traînage et déterminer la valeur de  $K_3$  permettant d'annuler cette erreur.

**Q9.** Exprimer et déterminer l'erreur d'accélération  $\varepsilon_a$  en prenant les valeurs de  $K_3$  et de  $K_1$  déterminées précédemment. Conclure quant au respect du cahier des charges.

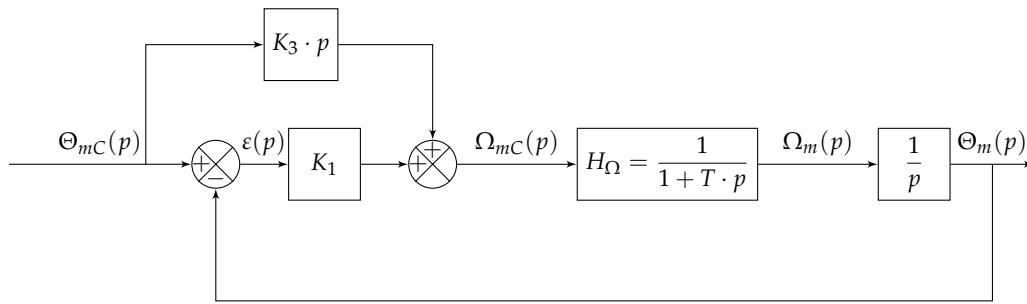


FIGURE 6.33 – Second modèle

Nous avons considéré au-dessus que le couple résistant est négligeable, on considère maintenant que  $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$  avec  $C_{r0}$  un couple résistant constant.

**Q10.** Déterminer  $\Theta_m(p)$  sous la forme  $\Theta_m(p) = H_\Theta \cdot \Theta_{mC}(p) + H_{Cr}(p) \cdot C_r(p)$ .

**Q11.** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\theta_m(t))$  pour  $\theta_{mC}(t) = \Theta_0 \mathcal{H}(t)$  et  $c_r(t) = C_{r0} \cdot \mathcal{H}(t)$ .