

Feuille n°4 : dynamique

Exercice 1 - Bras de robot

Corrigé page 10

Le schéma de la figure 1 modélise un bras de robot.

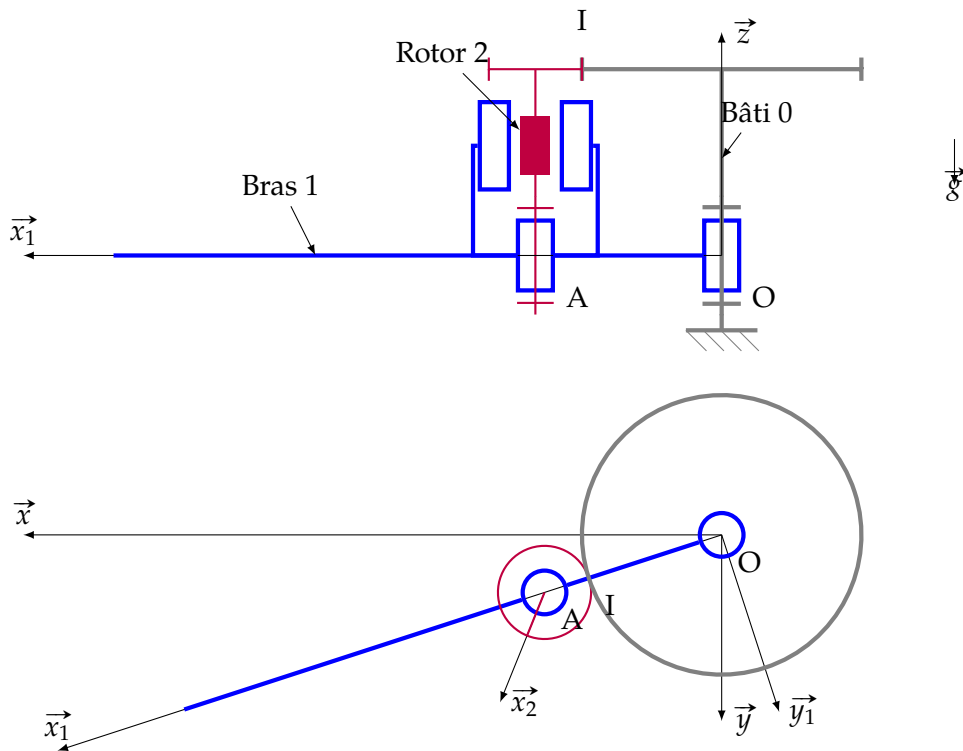


FIGURE 1 – Bras de robot

Le moteur d'axe (A, \vec{z}) , dont le stator est solidaire du bras 1 et le rotor du pignon moteur 2, entraîne le bras en rotation autour de l'axe (O, \vec{z}) à travers un train d'engrenage :

- pignon moteur : Z_2 dents, rayon R_2 ,
- roue : Z_0 dents, rayon R_0 .

Le couple moteur de 2 sur 1 est noté $\vec{C}_m = C_m \vec{z}$.

On note :

- $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1)$, $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{10} \cdot \vec{z}$ avec $\omega_{10} = \dot{\alpha}$;
- $\theta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, $\vec{\Omega}_{2/1} = \omega_m \cdot \vec{z}$ avec $\omega_m = \dot{\theta}$;
- $\vec{OA} = L_1 \cdot \vec{x}_1$, $\vec{AI} = H_2 \cdot \vec{z} - R_2 \cdot \vec{x}_1$.

L'engrenage (figure 2) est réalisé à partir de pignon à denture droite, l'angle de pression est de $\beta = 20^\circ$.

On note : $\{\mathcal{A}_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_{02} \cdot \sin \beta & 0 \\ F_{02} \cdot \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)^I}$ le torseur de l'action transmissible par la roue 0 sur le

pignon 1 avec I le point de contact ($\vec{OI} \cdot \vec{z} = h$).

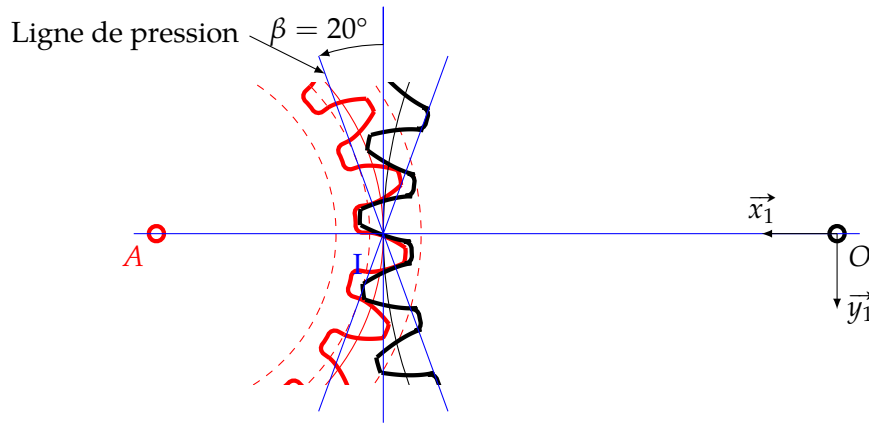


FIGURE 2 – Action de contact entre les roues dentées

Soit A , le centre d'inertie de l'ensemble composé du rotor et du pignon moteur. Cet ensemble est équilibré dynamiquement par rapport à l'axe (A, \vec{z}) , son moment d'inertie autour de (A, \vec{z}) est noté I_2 , et sa masse M_2 .

Le centre d'inertie G_1 de l'ensemble S_1 , composé du bras et du stator, de masse M_1 est tel que $\overrightarrow{OG_1} = x_g \cdot \vec{x}_1$.

La matrice d'inertie de cet ensemble en O s'écrit : $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$.

Les liaisons sont supposées parfaites.

L'objectif de l'étude est de déterminer le couple moteur pour la loi d'évolution de la figure 3 du bras (entre les instants T_0 et T_3 le bras fait une rotation de 180°) :

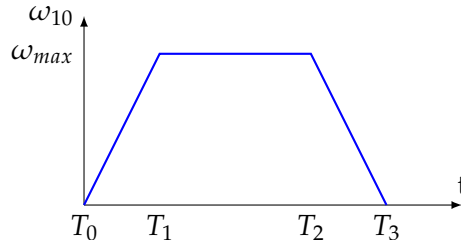


FIGURE 3 – Loi d'évolution du bras

Q1. Déterminer ω_{10} et ω_{20} en fonction de ω_m .

Q2. Tracer le graphe des liaisons et placer sur celui-ci les efforts. Préciser les différents torseurs des actions transmissibles. Justifier la forme du torseur des actions transmissibles par la liaison engrenage. Les différents torseurs seront écrits dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Q3. Appliquer le théorème du moment dynamique au bras de robot en O en projection suivant \vec{z} .

Q4. Isoler maintenant le rotor, et écrire les équations du P.F.D permettant de déterminer la composante suivant \vec{y}_1 du torseur des actions transmissibles de la liaison entre le rotor 2 et le bras 1.

Q5. En déduire l'équation différentielle du mouvement permettant d'obtenir le couple moteur en fonction des paramètres du mouvement et des paramètres cinétiques, puis tracer l'évolution de celui-ci sur le graphe des vitesses.

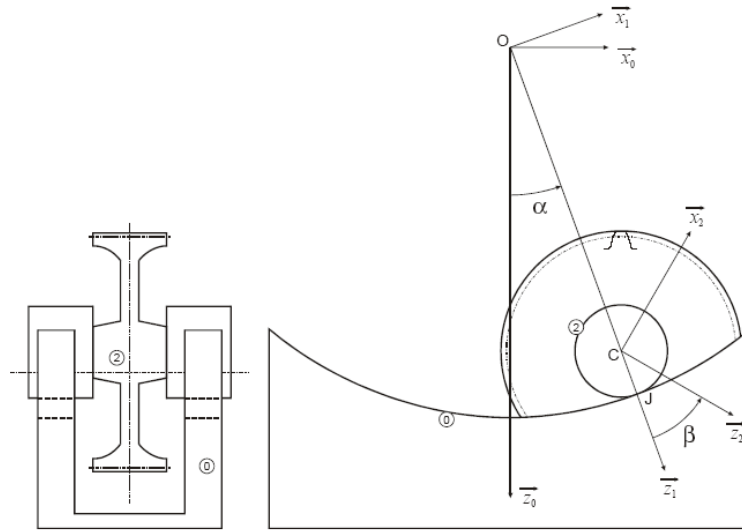
Exercice 2 - Détermination expérimentale du moment d'inertie

Corrigé page 11

Mesure d'un moment d'inertie

La figure suivante représente un dispositif conçu pour déterminer le moment d'inertie d'un engrenage. L'engrenage est fixé de part et d'autre à deux cylindres en acier qui roulent sur les portées

cylindriques du bâti 0. En écartant l'engrenage de sa position d'équilibre, on obtient un mouvement oscillatoire. L'objectif du problème est de montrer comment déterminer le moment d'inertie de l'engrenage par rapport à son axe de rotation (C, \vec{y}) , à partir de la mesure de la période d'oscillation.



Données :

- Rayon des portées cylindriques $R = 200 \text{ mm}$
- Rayon des cylindres $r = 18 \text{ mm}$
- Épaisseur des cylindres $e = 20 \text{ mm}$
- Masse de l'engrenage $m = 3617 \text{ g}$
- Coefficient de frottement en J (respectivement J') $f = 0.15$

Les hypothèses suivantes sont considérées :

- Les cylindres de rayon r sont en acier de masse volumique $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$,
- Il y a roulement sans glissement au point J (respectivement au point J' , le contact est supposé ponctuel.
- La pièce 2 est constituée de l'ensemble : engrenage + 2 cylindres.
- Le point C est le centre de gravité de la pièce 2.
- Le moment d'inertie de la pièce 2 par rapport à son axe de rotation (C, \vec{y}) est noté I_2 . La matrice d'inertie de cette pièce est diagonale.

A. Étude cinématique

Q1. Expliciter les vitesses $\vec{V}(C, 2/0)$ et $\vec{V}(J, 2/0)$.

Q2. Écrire la relation de roulement sans glissement et déterminer une relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$.

B. Étude dynamique

Q3. Calculer la masse M de la pièce 2.

Q4. Calculer l'accélération du point C.

Q5. Calculer le moment dynamique de la pièce 2 en C.

Q6. Faire le bilan des actions mécaniques appliquées sur la pièce 2.

Q7. Appliquer le P.F.D. et écrire les équations de la dynamique.

C. Étude du mouvement

Q8. Du système précédent, extraire l'équation différentielle qui décrit le mouvement.

Q9. En supposant que l'angle α reste faible, on peut utiliser la simplification $\sin \alpha = \alpha$. Simplifier et résoudre cette équation du mouvement.

D. Exploitation

A l'aide d'un chronomètre, on mesure une période d'oscillation $T = 4.06s$,

Q10. Calculer la valeur numérique de I_2 .

Q11. En déduire, le moment d'inertie de l'engrenage seul.

A l'instant initial, $t = 0$, la pièce 2 est lâchée à une position $\alpha = \alpha_0$, avec une vitesse nulle.

Q12. Quelle est la valeur maximale α_0 pour qu'il n'y ait pas de glissement en J.

Exercice 3 - Machine à vibrer le béton

d'après Centrale TA95

Corrigé page 13

Les deux figures suivantes (fig 4, 5) représentent schématiquement une machine à vibrer des éléments préfabriqués en béton. Un châssis sur roues est solidaire du moule et du stator d'un moteur électrique destiné à générer les vibrations.

A. Données

L'ensemble 1, de masse M_1 , en translation comprend la plate-forme, le moule, le béton et le stator du moteur électrique. Sa position par rapport au repère \mathcal{R}_0 galiléen est définie par $x(t)$. La liaison équivalente par rapport au sol est une glissière de direction \vec{x}_0 .

L'ensemble 2, de masse M_2 , tournant par rapport à 1 autour de l'axe (A, \vec{z}_0) , comporte le rotor du moteur, son arbre et deux disques excentrés. On note :

- $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ la vitesse de rotation constante de l'ensemble 2 ;
- G_2 le centre d'inertie du solide 2 avec $\overline{AG_2} = c \cdot \vec{x}_2$;
- La matrice d'inertie de l'ensemble 2 s'écrit en A dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$:

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(2)}} = \begin{pmatrix} I_{Ax} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Az} \end{pmatrix}_{\substack{A \\ \mathcal{B}_2}}$$

Les roues sont en liaison pivot, sans frottement, par rapport à 1. La masse et l'inertie des roues sont négligeables.

Le moteur applique sur le rotor un couple noté $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$.

Le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ est plan de symétrie du système.

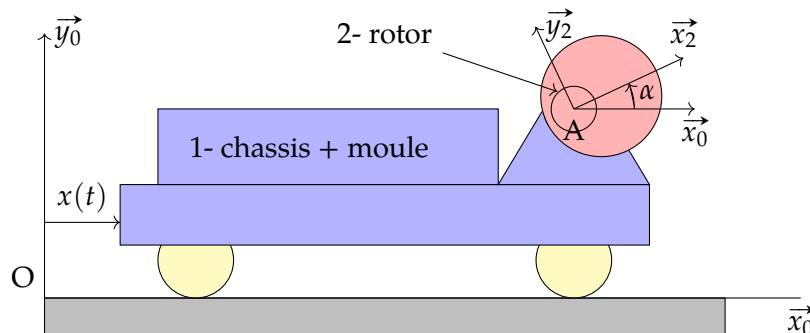


FIGURE 4 – Machine à vibrer le béton - modélisation

B. Questions

Q1. Déterminer la vitesse et l'accélération du point G_2 , centre de gravité de l'ensemble 2, par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

Q2. On modélise l'ensemble 2 par :

- un cylindre de diamètre d_3 , de hauteur h_3 et de masse volumique ρ_3 pour le rotor du moteur ;

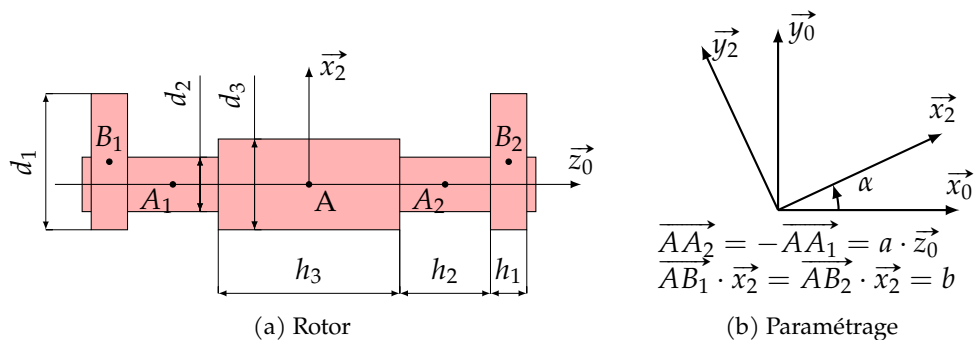


FIGURE 5 – Machine à vibrer le béton

- deux disques centrés respectivement en B_1 et B_2 de diamètre d_1 , de hauteur h_1 de masse volumique ρ_1 ;
- deux arbres cylindriques centrés respectivement en A_1 et A_2 de diamètre d_2 , de hauteur h_2 et de masse volumique ρ_1 reliant le rotor aux disques ;
- les trois cylindres sont d'axe \vec{z}_0 .

Q2a. Justifiez la forme de la matrice d'inertie de l'ensemble 2.

Q2b. Déterminer le moment d'inertie de l'ensemble 2 par rapport à l'axe (A, \vec{z}_0) , en fonction des h_i, d_i et ρ_i .

Q3. Déterminer $x(t) = f(M_1, M_2, c, \omega, t)$, l'équation du mouvement de l'ensemble 1, par rapport au repère \mathcal{R}_0 . On considérera que le moteur tourne à vitesse constante et qu'à l'instant $t=0, x(0) = 0$. Pour cela :

Q3a. Tracer le graphe de structure du mécanisme et établir l'inventaire des efforts sur 1 et 2.

Q3b. Appliquer le PFD sur l'ensemble $\{1+2\}$.

Q3c. en déduire l'équation de mouvement. Limiter l'étude aux équations nécessaires pour résoudre le problème posé.

Q4. Déterminer l'expression du moment du couple moteur C_m du stator sur le rotor, en fonction de M_1, M_2, g, ω, c et t .

On modélise la liaison en A_1 entre le rotor et le châssis par une liaison sphérique et celle en A_2 par une liaison sphère cylindre.

Q5. Déterminer les composantes du torseur des actions transmissibles pour les deux liaisons entre l'ensemble 1 et l'ensemble 2 en A_1 et A_2 .

Exercice 4 - Gyrometre

adapté du gyrometre de la plateforme Steward

Corrigé page 16

A. Présentation générale et objectif du travail

Les capteurs de vitesse angulaire, également appelés gyromètres, sont utilisés sur des systèmes mobiles et en particulier en aéronautique.

Le gyromètre étudié dans ce sujet est utilisé en aéromodélisme sur les hélicoptères, depuis 1975, ils sont maintenant remplacés par des gyromètres à semi-conducteurs.

Il s'agit d'un gyromètre dit « 1 axe », capable de mesurer la vitesse angulaire autour d'un axe seulement, généralement l'axe de lacet de l'hélicoptère.

Le fonctionnement de ce capteur est basé sur les règles fondamentales de la mécanique d'une toupie, animée d'une vitesse de rotation élevée, et en particulier le phénomène de « couple gyroscopique » dû aux forces de Coriolis.

Les gyromètres sont installés sur les modèles réduits d'hélicoptères pour faciliter essentiellement les figures de vol stationnaire, pendant lesquelles la machine doit conserver son cap sans être perturbée par le vent de travers. Le rôle du gyromètre est alors de détecter les variations de cap de l'appareil,

provoquées par le vent ou toute autre perturbation et de les contrer par l'intermédiaire du rotor anti-couple situé dans la queue de l'hélicoptère.

Pour régler correctement la boucle de stabilisation de l'hélicoptère, il est nécessaire de connaître la sensibilité du gyromètre (son gain statique) et sa fonction de transfert.

Le but de ce sujet est de déterminer analytiquement le gain du gyromètre tournant.

A.1. Présentation détaillée du gyromètre FUTABA FP-G 153 BB

Le schéma - bloc donné figure 1 distingue les parties mécaniques et électroniques du gyromètre et présente les grandeurs physiques d'entrée et de sortie ;

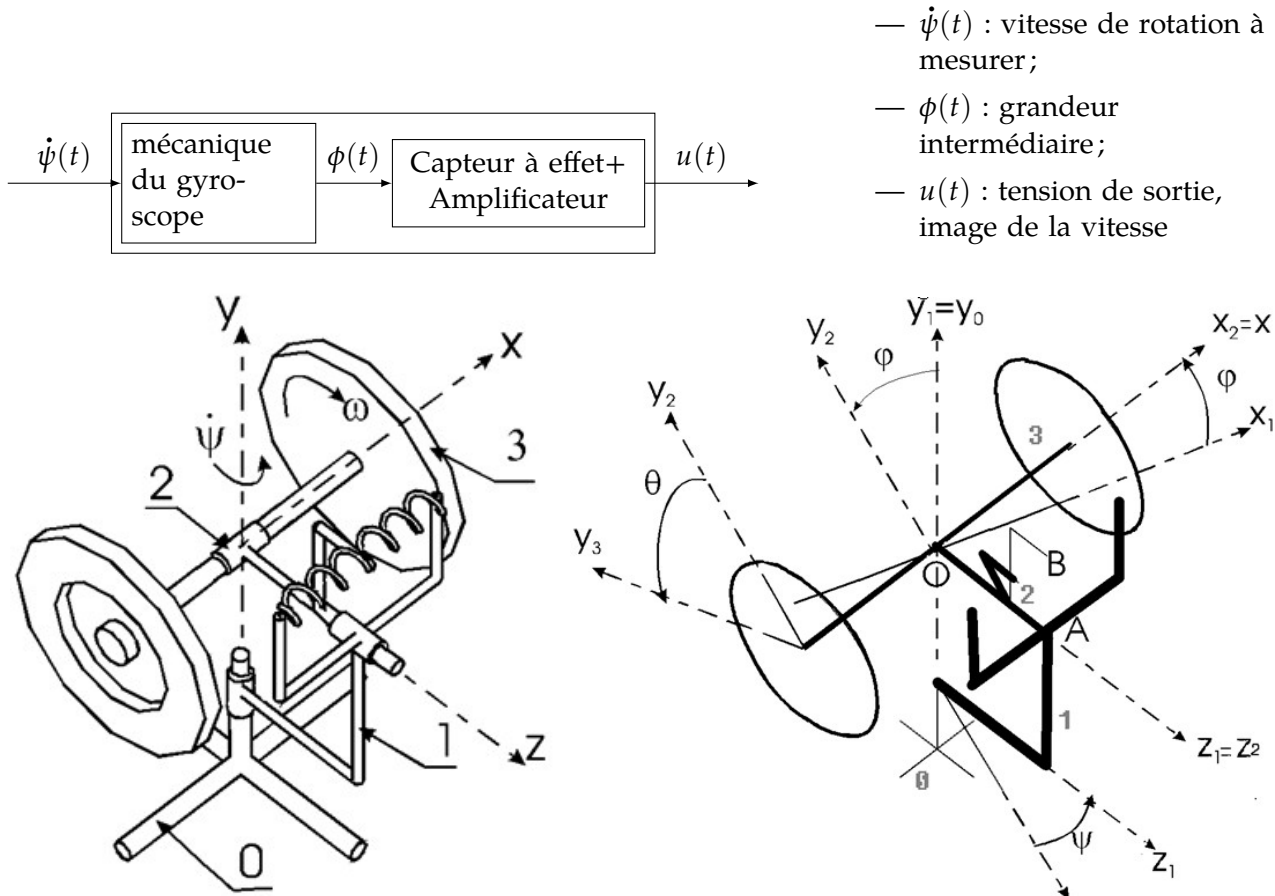


FIGURE 6 – structure mécanique du gyromètre et paramètres

A.2. Description de la partie mécanique du gyromètre : (voir la figure 6)

La toupie ou rotor (3) est entraînée en rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_2) par rapport au support (2), par un moteur à courant continu, à une vitesse angulaire $\omega(t)$ élevée (entre 6000 et 10000 tr/mn). Le moteur est alimenté par une tension de 3,5 V.

Cette toupie (3) est constituée d'un arbre de diamètre 2 mm, aux extrémités duquel sont montés 2 disques de laiton, donnant au rotor un moment d'inertie important autour de cet axe.

La pièce intermédiaire (2) dans laquelle est installé le stator du moteur, est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_1) avec le solide (1) par l'intermédiaire d'un roulement à billes. La pièce (2) est rappelée dans sa position d'équilibre par deux ressorts identiques.

Le châssis (1) est solidaire du mobile dont il faut mesurer la vitesse de rotation (l'hélicoptère).

Le solide (0) modélise le référentiel galiléen.

Lorsque le gyromètre (avec la toupie en rotation) est animé d'un mouvement de rotation autour de son axe d'entrée (O, \vec{y}_0) , la toupie et la pièce intermédiaire (2) s'inclinent autour de l'axe (O, \vec{z}_1) perpendiculaire à l'axe d'entrée.

Ce phénomène de « couple gyroscopique » peut être facilement visualisé lorsque le moteur de la toupie est alimenté, en faisant pivoter le capteur autour d'un axe perpendiculaire à sa base.

C'est l'angle d'inclinaison ($\phi(t)$) de la pièce (2) autour de l'axe (O, \vec{z}_1) qui constitue la grandeur de sortie de la partie mécanique du gyromètre.

L'angle d'inclinaison ($\phi(t)$) de la pièce (2) est limité par une butée mécanique à $\pm 9^\circ$.

capteur à effet Hall :

La mesure de l'angle ($\phi(t)$) est réalisée par un capteur à effet Hall qui est situé sur l'embase du support du gyromètre et qui mesure les variations de flux magnétique provoqué par un aimant fixé sur la pièce mobile (2). Le capteur à effet Hall est alimenté par une tension de 3,5 V, et il délivre en sortie une tension $u(t)$ qui dépend de l'angle ($\phi(t)$).

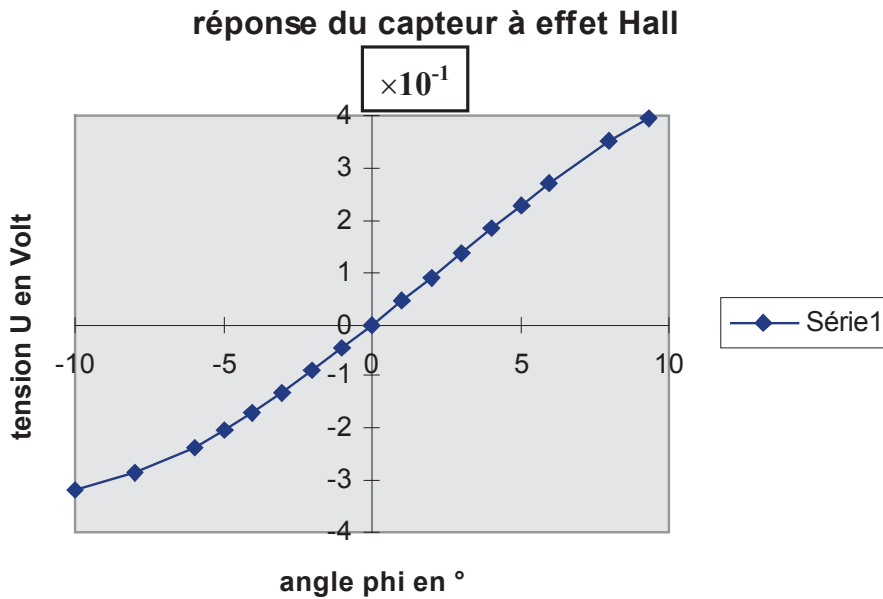


FIGURE 7 – caractéristique du capteur à effet hall

Données

Le schéma de la partie mécanique du gyromètre (Voir figure 6) fait apparaître 4 solides :

- 0 : Solide de référence, immobile par rapport à la terre, le repère Lié à 0 est supposé galiléen
- 1 : Support du gyromètre
- 2 : Pièce intermédiaire (masse négligeable)
- 3 : Toupie

avec les liaisons suivantes :

- Liaison Toupie 3 / Pièce 2 : Pivot d'axe (O, \vec{x}_2)
- Liaison Pièce 2 / Support 1 : Pivot d'axe (O, \vec{z}_2)
- Le châssis (1) est libre par rapport au référentiel galiléen (0) mais nous supposons dans toute la suite que seule la rotation autour de l'axe (O, \vec{y}_0) est possible, de même nous supposons que $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$. Nous imposons en fait entre le support du gyromètre et le référentiel galiléen un mouvement du type liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_0) .

et les paramètres

- $\dot{\psi}(t)$ est la vitesse angulaire d'entrée du capteur : $\psi = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$;
- $\phi(t)$ est l'angle mesuré par le capteur à effet Hall, dont la tension de sortie $u(t)$ est l'image : $\phi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$;
- $\theta(t)$ est la position de la toupie $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$ et $\theta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

Données :

- $h = 11,5 \text{ mm}$: distance AB;
- $k = 17 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$: raideur de chaque ressort;
- La matrice d'inertie de la toupie (3) est diagonale dans la base R2 :
 - $I_x = 1,5 \times 10^{-6} \text{ kgm}^2$: moment d'inertie de la toupie (3) autour de l'axe (O, \vec{x}_2) ,
 - I_z : moment d'inertie de la toupie (3) autour des axes (O, \vec{y}_2) et (O, \vec{z}_2) ;
- l'inertie de la pièce (2) est négligeable devant celle de la toupie.

B. Questions

B.1. Justification du phénomène de « couple gyroscopique »

On rappelle l'expression de la force de Coriolis qui s'exerce en un point P de masse m de la toupie (3), animé d'une vitesse $\vec{V}_{P \in 3/R_1}$ avec $\|\vec{V}_{P \in 3/R_1}\| = r \cdot \omega$ par rapport au repère R_1 , repère mobile par rapport au repère galiléen R_0 .

$$d\vec{F}_{\text{coriolis}} = -2 \cdot dm \cdot \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{P \in 3/R_1}$$

Q1. Justifier graphiquement le basculement de l'ensemble (2)+(3), par rapport à sa position d'équilibre autour de l'axe z, lors du pivotement du gyromètre autour de l'axe y : Pour cela représenter graphiquement sur la figure 8a sur le rotor aux points P1, P2, P3, P4 les différentes composantes de la force de Coriolis, et en déduire le phénomène de couple.

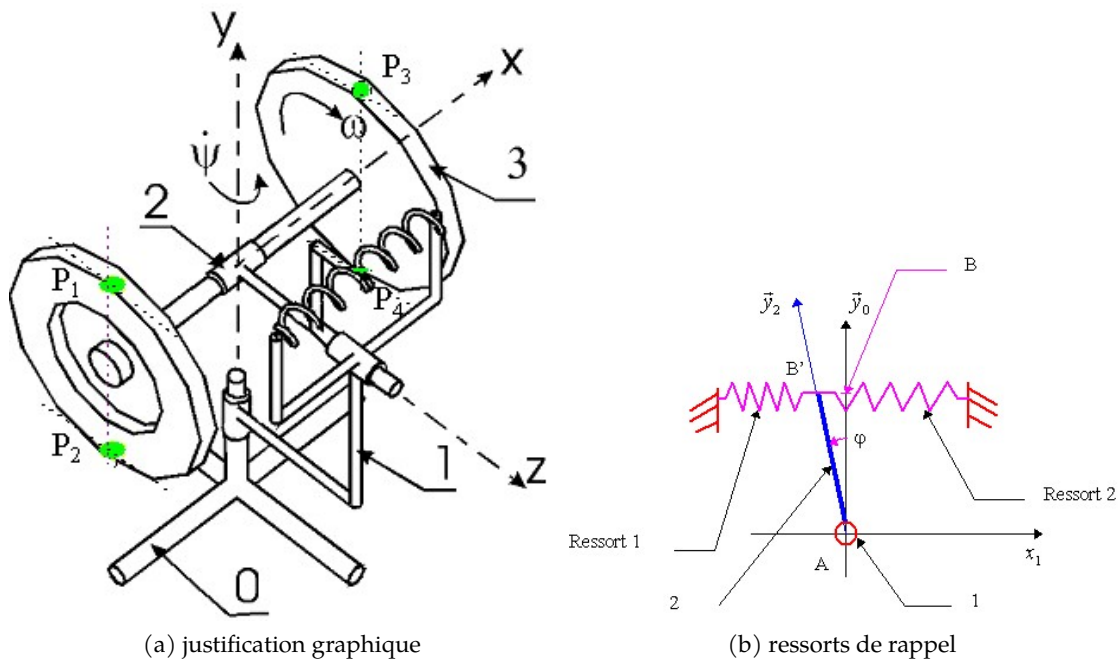


FIGURE 8

B.2. Équation différentielle du mouvement

Q2. Écrire les torseurs cinématique de (3) par rapport à (2) et de (2) par rapport à (1). En déduire le torseur cinématique du mouvement de (3) par rapport au référentiel galiléen (0).

Le mouvement de (1) par rapport à (0) est représenté par le torseur : $\{\mathcal{V}_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\psi}(t) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_O$

Q3. Écrire le torseur cinétique du mouvement de (3) par rapport au référentiel galiléen.

Q4. Écrire la projection du moment dynamique de (3) par rapport au référentiel galiléen (0) suivant \vec{z}_2 .

Q5. En vous aidant de la figure 8b, déterminer le torseur d'action des ressorts sur (2).

— l'action du ressort 1 sur la pièce (2) s'écrit : $\overrightarrow{F_{res1 \rightarrow 2}} = -k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{x}_1$

— l'action du ressort 2 sur la pièce (2) s'écrit : $\overrightarrow{F_{res2 \rightarrow 2}} = 3k \cdot (l - l_0) \cdot \vec{x}_1$

Q6. Isoler l'ensemble $E=(2)+(3)$, et écrire la projection du théorème du moment dynamique en O suivant \vec{z}_2 , en déduire l'équation différentielle du mouvement.

B.3. Modèle simplifié

On suppose pour la suite :

— la vitesse de rotation de la toupie est constante $\dot{\theta} = \omega = cste$;

— la vitesse de rotation $\dot{\psi}(t)$ est toujours petite devant la vitesse de rotation de la toupie $\dot{\psi}(t) \ll \omega$;

— l'angle $\phi(t)$ est suffisamment petit pour que $\cos \phi(t) = 1$ et $\sin \phi(t) = 0$.

Q7. Montrer que le comportement du gyromètre peut être décrit par une équation différentielle du second ordre en $\phi(t)$, à coefficient constant.

Q8. Écrire la fonction de transfert du capteur $\frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$ avec $\Psi(p)$ la transformée de la place de $\psi(t)$ et $\Phi(p)$ la transformée de $\phi(t)$.

Q9. Pouvez-vous donner l'allure de la réponse du gyromètre à une entrée en échelon.

Q10. Pensez-vous que le modèle simplifié ci-dessus est un modèle pertinent