

Dynamique du solide

3.1 Principe fondamental de la dynamique

3.1.1 Énoncé

Il existe un repère spatial - temporel (un repère associé à une chronologie) dit repère galiléen \mathcal{R}_g , tel qu'à tout instant, le torseur des actions mécaniques extérieures agissant sur le système matériel Σ est égal au torseur dynamique de Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen.

On note Σ le système matériel isolé et $\bar{\Sigma}$ le reste de l'univers.

Le principe fondamental de la dynamique, P.F.D., est traduit par l'égalité suivante :

$$\left\{ \mathcal{D}_{\Sigma/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma} \right\}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{A_{\Sigma/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}} \end{array} \right\}_A$$

avec

- résultante des actions mécaniques de $\bar{\Sigma}$ sur Σ : $\overrightarrow{R_{\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}}$;
- moment au point A des actions mécaniques de $\bar{\Sigma}$ sur Σ : $\overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}}$;
- résultante dynamique de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g : $\overrightarrow{A_{\Sigma/R}}$;
- moment dynamique en A de l'ensemble matériel Σ dans son mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g : $\overrightarrow{\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}}$.

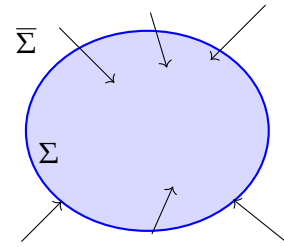


FIGURE 3.1 – Système isolé

3.1.2 Caractère galiléen des repères

Un repère physique est un système d'axes qui permet de décrire la position d'un point, d'un ensemble matériel. Il est bien évident que la position d'un point donné n'est pas décrite de la même manière selon que l'on se place dans un référentiel ou dans un autre.

Le principe fondamental de la dynamique présume l'existence d'un repère dit repère galiléen dans lequel le principe fondamental de la dynamique est valable.

Ce repère de référence dans lequel tous les mouvements pourraient être décrits exactement ne peut être qu'approché. Mais comme c'est toujours le cas dans tous les domaines de la physique, la validité d'une loi dépend du degré de précision souhaité : ainsi un repère usuel de la mécanique peut donc être considéré comme galiléen vis-à-vis de tel problème mécanique, et non galiléen vis-à-vis de tel autre. Les principaux repères approchés sont :

Le référentiel de Copernic est centré au centre d'inertie du système solaire. Les directions de ses axes sont définies à l'extérieur du système solaire par trois galaxies lointaines. Ce référentiel néglige le mouvement du Soleil dans la Voie Lactée et le mouvement de celle-ci dans le reste de l'univers.

Le référentiel de Galilée est centré au centre de la Terre. Ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. On comprend bien que choisir ce repère comme repère galiléen revient à supposer que le mouvement de celui-ci par rapport au repère précédent est négligeable (ou en translation circulaire!). Ce repère est utilisé aussi bien pour décrire le comportement des satellites que pour étudier le pendule de Foucault (mise en évidence de la rotation de la Terre).

Les référentiels liés à la Terre dont le principal est le repère géographique de la sphère terrestre dont le centre est au centre de la Terre et dont les axes sont solidaires de la planète mais aussi tous les repères locaux.

Les référentiels locaux ou du laboratoire dont l'origine est locale au laboratoire et les axes sont orientés selon les propriétés du système étudié. Ce référentiel est le moins galiléen de tous mais il est parfaitement utilisable dans tous les cas classiques. La qualité principale de ce repère est sa facilité d'emploi, mais choisir ce référentiel comme référentiel galiléen revient à négliger la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

Le caractère galiléen peut être toutefois restitué grâce à la loi de composition des accélérations. Dans les repères liés à la Terre, elle conduit à introduire une accélération complémentaire ou accélération de Coriolis dans l'expression générale de l'accélération.

Nous serons donc parfois amené à écrire le P.F.D. dans un repère non galiléen.

3.2 Théorèmes généraux

Le principe fondamental de la dynamique est une égalité entre deux torseurs, pour que ces torseurs soient égaux, il faut que leurs résultantes soient égales et que leurs moments en un point soient égaux. Ces deux équations vectorielles sont les deux théorèmes généraux.

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_{\Sigma/R}} = \overrightarrow{R_{\Sigma \rightarrow \Sigma}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{M_{A,\Sigma \rightarrow \Sigma}} \end{cases}$$

3.2.1 Théorème de la résultante dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g , la résultante dynamique est égale à la résultante générale du torseur associé aux actions extérieures à Σ , $\overrightarrow{A_{\Sigma/R}} = \overrightarrow{R_{\Sigma \rightarrow \Sigma}}$, que l'on écrit :

$$m_{\Sigma} \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_{\Sigma},\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{R_{\Sigma \rightarrow \Sigma}}$$

3.2.2 Théorème des quantités de mouvement

Nous savons que : $\overrightarrow{\Gamma_{G_{\Sigma},\Sigma/R}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G_{\Sigma},\Sigma/R}} \right]_{\mathcal{R}_g}$.

Par conservation de la masse dans le système Σ , on peut donc écrire le théorème de la résultante dynamique sous la forme :

$$m_{\Sigma} \cdot \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{G_{\Sigma},\Sigma/R}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{R_{\Sigma \rightarrow \Sigma}}$$

3.2.3 Théorème du moment dynamique

Pour tout ensemble matériel Σ en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g , le moment dynamique est égal au moment résultant du torseur associé aux actions extérieures à Σ .

$$\overrightarrow{\delta_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}}$$

3.2.4 Théorème du moment cinétique

Si on écrit le théorème du moment dynamique en G_Σ , centre d'inertie de l'ensemble isolé, on peut donner une autre écriture au théorème du moment dynamique.

Le moment dynamique s'écrit $\overrightarrow{\delta_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g}$, au centre d'inertie G_Σ d'où

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{G_\Sigma,\Sigma/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M_{G_\Sigma,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}}$$

De même, dans le cas particulier où le point A est fixe dans \mathcal{R}_g , on peut écrire :

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{A,\Sigma/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{M_{A,\bar{\Sigma} \rightarrow \Sigma}}$$

3.3 Utilisation du P.F.D.

Le principe fondamental de la dynamique se traduit par une égalité de torseur, c'est-à-dire par deux égalités vectorielles (théorèmes généraux) entre les efforts appliqués au système étudié et les quantités d'accélération de ce système par rapport à un repère galiléen.

Un problème de dynamique du solide comporte donc au maximum 6 équations scalaires (2×3) pour chaque solide isolé. Pour pouvoir "tenter" de résoudre ce problème, il ne doit pas comporter plus d'inconnues que d'équations.

On retrouve dans les équations scalaires :

- les paramètres de positions (connus et/ou inconnus),
- les dérivées premières et secondes de ces paramètres,
- les actions mécaniques (connues et/ou inconnues),
- les données du problème.

On distingue trois principaux types de problèmes à résoudre.

- Les actions extérieures sont connues, on cherche à déterminer le mouvement du mécanisme isolé.
- Les actions extérieures sont connues, on cherche à déterminer les actions de liaison entre les différents solides du mécanisme.
- Le mouvement est imposé, on cherche à déterminer les actions extérieures motrices.

Dans le premier cas, il n'est pas forcément nécessaire d'étudier et résoudre tout le système d'équations. On cherche à isoler parmi les équations celles qui permettent d'obtenir l'(les)équation(s) différentielle(s) de mouvement. On appelle équation différentielle du mouvement, une équation différentielle entre les paramètres de mouvement et les actions mécaniques extérieures ne faisant pas intervenir les inconnues de liaisons.

Dans le second cas, il faut en général résoudre la totalité du système.

Le troisième cas est le complémentaire du premier.

3.4 P.F.D dans un repère non galiléen

3.4.1 Composition des accélérations

On se propose de déterminer l'accélération du point P d'un ensemble matériel E (associé à un repère R) en mouvement par rapport à l'ensemble matériel E_1 (repère R_1) lui-même en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g .

Nous savons que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{P,E/\mathcal{R}_g}} &= \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{V_{P,E_1/\mathcal{R}_g}} \\ \overrightarrow{V_{P,E/\mathcal{R}_g}} &= \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{V_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P}\end{aligned}$$

Dérivons cette relation par rapport au temps dans le repère galiléen \mathcal{R}_g :

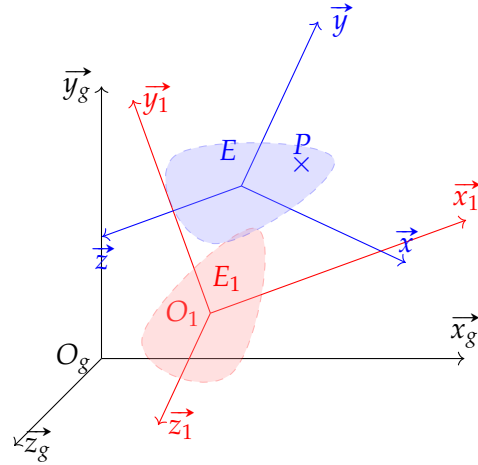


FIGURE 3.2 – Composition des accélérations

$$\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P} \right]_{\mathcal{R}_g}$$

Par définition : $\overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g}$ et $\overrightarrow{\Gamma_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g}$

La relation devient :

$$\overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right]_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1P} \right]_{\mathcal{R}_g} + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1P}$$

avec $\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1P} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{O_1P} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P}$

et $\left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right]_{\mathcal{R}_g} = \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} = \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}}$

D'où finalement la relation de composition des accélérations :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} \\ &\quad + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \left(\overrightarrow{V_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P} \right) + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1P} \\ \overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}} &= \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P} \right) \\ &\quad + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1P} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}}\end{aligned}$$

On note :

- $\overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}}$: accélération absolue du point P de E par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g ;
- $\overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}}$: accélération relative du point P appartenant à E par rapport au repère R_1 ;
- $\overrightarrow{\Gamma_{O_1,R_1/\mathcal{R}_g}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{O_1P} \right) + \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \right]_{\mathcal{R}_g} \wedge \overrightarrow{O_1P}$: accélération d'entraînement du

3.4 P.F.D dans un repère non galiléen

point P de R_1 par rapport à \mathcal{R}_g que l'on note $\overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}}$;

— $2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}}$: accélération de Coriolis.

L'accélération absolue d'un point P d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un référentiel R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère galiléen \mathcal{R}_g s'écrit comme la somme de l'accélération relative de P de E par rapport à R_1 , l'accélération d'entraînement du repère R_1 par rapport à \mathcal{R}_g et l'accélération de Coriolis :

$$\begin{array}{rclcl} \overrightarrow{\Gamma_{P,E/\mathcal{R}_g}} = & \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} + & \overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}} + & 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \\ \overrightarrow{\Gamma_{abs}} = & \overrightarrow{\Gamma_{rel}} + & \overrightarrow{\Gamma_{ent}} + & \overrightarrow{\Gamma_{cor}} \end{array}$$

3.4.2 Composition du torseur dynamique

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel galiléen \mathcal{R}_g s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{E/\mathcal{R}_g}} = \int_{P \in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/\mathcal{R}_g}} \cdot dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,E/\mathcal{R}_g}} = \int_{P \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/\mathcal{R}_g}} \cdot dm \end{array} \right\}_A$$

Pour le centre d'inertie G la décomposition de l'accélération donne :

$$\overrightarrow{\Gamma_{G,E/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{\Gamma_{G,E/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{G,R_1/\mathcal{R}_g}} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G,E/R_1}}$$

Décomposons, le moment dynamique :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{A,E/\mathcal{R}_g}} &= \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot dm = \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right) \cdot dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,E/\mathcal{R}_g}} &= \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} \cdot dm + \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}} \cdot dm \\ &\quad + 2 \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right) \cdot dm \end{aligned}$$

Par analogie, on peut décomposer le moment dynamique absolu comme la somme d'un moment dynamique relatif, d'entraînement et de Coriolis.

$$\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \overrightarrow{\delta_{rel}} + \overrightarrow{\delta_{ent}} + \overrightarrow{\delta_{cor}}$$

D'où le torseur dynamique que l'on peut décomposer aussi par analogie, sous la forme d'un torseur dynamique relatif, d'entraînement et de Coriolis :

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{D}_{E/R} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} dm \\ \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} dm \end{array} \right\}_A \\ \left\{ \mathcal{D}_{E/R} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} dm \\ \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,E/R_1}} dm \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} \overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}} dm \\ \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P,R_1/\mathcal{R}_g}} dm \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} 2 \overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} dm \\ + 2 \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{R_1/\mathcal{R}_g}} \wedge \overrightarrow{V_{P,E/R_1}} \right) dm \end{array} \right\}_A \end{aligned}$$

Par analogie on parle de torseur dynamique d'entraînement, relatif et de Coriolis

$$\begin{array}{rclcl} \left\{ \mathcal{D}_{E/R} \right\} = & \left\{ \mathcal{D}_{E/R_1} \right\} + & \left\{ \mathcal{D}_{E,R_1/\mathcal{R}_g} \right\} + & \left\{ \mathcal{D}_{cor,E/\mathcal{R}_g} \right\} \\ = & \left\{ \mathcal{D}_{rel} \right\} + & \left\{ \mathcal{D}_{ent} \right\} + & \left\{ \mathcal{D}_{cor} \right\} \end{array}$$

3.4.3 Principe fondamental dans un repère non galiléen

Soit E un ensemble matériel, \mathcal{R}_g le repère galiléen et R_1 le repère d'étude. On se propose d'écrire le principe fondamental de la dynamique dans le repère R_1 , par définition le P.F.D. s'écrit :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E} \right\}$$

En décomposant le torseur dynamique sur le repère R_1 :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E/R_1} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{E,R_1/\mathcal{R}_g} \right\} + \left\{ \mathcal{D}_{cor,E/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E} \right\}$$

Finalement le P.F.D par rapport au repère non galiléen R_1 devient :

$$\left\{ \mathcal{D}_{E/R_1} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{E,R_1/\mathcal{R}_g} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{cor,E/\mathcal{R}_g} \right\}$$

Dans un repère non galiléen, il faut soustraire aux forces extérieures appliquées à l'ensemble matériel E le torseur des forces d'inertie d'entraînement et le torseur des forces d'inertie de Coriolis.

Remarque : Si R_1 est en translation uniforme par rapport au repère galiléen, alors

$\left\{ \mathcal{D}_{E,R_1/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ 0 \right\}$ et $\left\{ \mathcal{D}_{cor,E/\mathcal{R}_g} \right\} = \left\{ 0 \right\}$ donc $\left\{ \mathcal{D}_{E/R_1} \right\} = \left\{ \mathcal{A}_{\bar{E} \rightarrow E} \right\}$, R_1 est donc aussi un repère galiléen.

3.5 Application – Équilibrage d'un solide

3.5.1 Problème général de l'équilibrage

Dans le cas d'un mouvement de rotation, les vibrations dues à une mauvaise répartition des masses par rapport à l'axe de la rotation induisent une usure et une détérioration rapide des paliers et créent une gêne pour l'utilisateur (bruits, vibrations).

L'objet de l'équilibrage est de supprimer ces vibrations.

Nous allons évaluer l'influence de la répartition des masses (position du centre d'inertie, symétrie du solide) sur ces vibrations.

a) Données

Soit un solide S_1 de masse M en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_0) par rapport au bâti S_0 . Ce solide n'ayant aucune particularité géométrique (ni plan de symétrie, ni axe de révolution), la matrice d'inertie du solide en O est de la forme :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}}$$

Le repère $R_1 = (O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au solide en rotation avec $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$, pour $t=0, \theta = 0$.

$$\vec{OG} = x_g \cdot \vec{x}_1 + z_g \cdot \vec{z}_0$$

R_0 un repère galiléen, \vec{z}_0 est vertical ascendant.

Un couple moteur $\vec{C}_m = C_m \cdot \vec{z}_0$ permet la rotation.

La liaison pivot est parfaite.

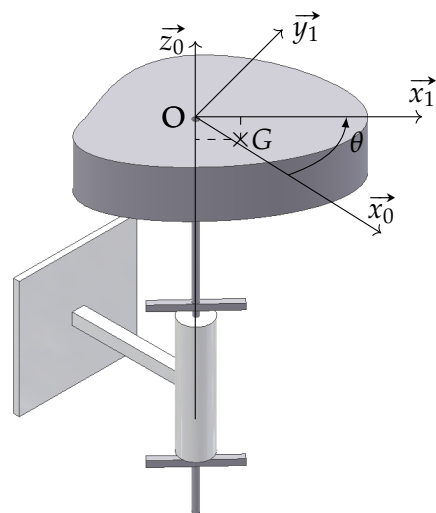


FIGURE 3.3 – Équilibrage

b) Étude dynamique

Inventaire des actions extérieures appliquées au solide en rotation

- Action de la pesanteur sur le solide : $\left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O$
- Couple moteur : $\left\{ \mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P}$
- Actions transmissibles par la liaison pivot : $\left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{z}_0)} = \left\{ \begin{matrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{matrix} \right\}_{(?, ?, \vec{z}_0)}$

Détermination du torseur dynamique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Déterminons dans un premier temps le torseur cinétique en O du solide S_1 dans son mouvement par rapport à R_0 :

- Résultante cinétique : $\overrightarrow{p}_{S_1/R_0} = M \cdot \overrightarrow{V}_{G \in S_1/R_0} = M \cdot x_g \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1$
- Moment cinétique, O est un point fixe dans le référentiel, donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}_{O, S_1/R_0} &= \overline{\overline{I}}_O(S_1) \cdot \overrightarrow{\Omega}_{S_1/R_0} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{O_{B_1}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \\ &= -E \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= -E \cdot \omega \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \omega \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \omega \cdot \vec{z}_0 \text{ avec } \omega = \dot{\theta} \end{aligned}$$

d'où les composantes du torseur dynamique : $\left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A}_{S_1/R_0} \\ \overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} \end{matrix} \right\}_O$

- $\overrightarrow{A}_{S_1/R_0}$, résultante dynamique, par dérivation de la résultante cinétique :

$$\overrightarrow{A}_{S_1/R_0} = M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1$$

- $\overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0}$, moment dynamique en O, O est un point fixe dans R_0 donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} &= \left[\frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma}_{O, S_1/R_0} \right]_{R_0} \\ &= -E \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_1 - D \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - E \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{y}_1 + D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ &= (D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S_1 .

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{A}_{S_1 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \mathcal{D}_{S_1/R_0} \right\} &= \left\{ \mathcal{P}_{g \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{C}_{Mot \rightarrow S_1} \right\} + \left\{ \mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{A}_{S_1/R_0} \\ \overrightarrow{\delta}_{O, S_1/R_0} \end{matrix} \right\}_O &= \left\{ \begin{matrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_O + \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{matrix} \right\}_{\forall P} + \left\{ \begin{matrix} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{matrix} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{z}_0)} = \left\{ \begin{matrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{matrix} \right\}_{(?, ?, \vec{z}_0)} \end{aligned}$$

Il est judicieux ici, d'écrire le torseur des efforts transmissibles par la liaison pivot $\{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\}$ dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, de déterminer les composantes de la liaison dans cette base puis de revenir dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

On obtient donc les deux équations vectorielles suivantes :

— Théorème de la résultante dynamique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_{S_1/R_0}} &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{y}_1 - M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_1 &= -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 + \vec{0} + X_{01} \cdot \vec{x}_1 + Y_{01} \cdot \vec{y}_1 + Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \end{aligned}$$

— Théorème du moment dynamique

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{O, S_1/R_0}} &= M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 + L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1 \\ (D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta}) \cdot \vec{x}_1 + (-D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2) \cdot \vec{y}_1 + C \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_0 &= M \cdot g \cdot x_g \cdot \vec{y}_1 + C_m \cdot \vec{z}_0 \\ &\quad + L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1 \end{aligned}$$

La projection de ces deux équations donne les 6 équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ M \cdot x_g \cdot \ddot{\theta} = Y_{01} \\ 0 = -M \cdot g + Z_{01} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = L_{01} \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 = M \cdot g \cdot x_g + M_{01} \\ C \cdot \ddot{\theta} = C_m \end{cases}$$

Détermination des efforts dans la liaison Pour continuer et simplifier les calculs, nous supposons que le rotor tourne à vitesse constante $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$, les 6 équations deviennent :

$$\begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = X_{01} \\ 0 = Y_{01} \\ M \cdot g = +Z_{01} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} D \cdot \dot{\theta}^2 = L_{01} \\ -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g = M_{01} \\ 0 = C_m \end{cases}$$

Le torseur des actions transmissibles dans la liaison pivot s'écrit dans la base liée au solide en rotation $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$:

$$\{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\} = \begin{pmatrix} X_{01} = -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 & L_{01} = D \cdot \dot{\theta}^2 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} = -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g \\ Z_{01} = M \cdot g & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_O}$$

On s'aperçoit que les efforts (résultante et moment) dans la liaison pivot sont fonction de la vitesse de rotation $\dot{\theta}$. En projection dans la base galiléenne, R_0 , on peut mieux évaluer l'influence des paramètres cinétiques sur les efforts dans la liaison.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\} &= \begin{pmatrix} X_{01} \cdot \cos \theta & L_{01} \cdot \cos \theta - M_{01} \cdot \sin \theta \\ X_{01} \cdot \sin \theta & L_{01} \cdot \sin \theta + M_{01} \cdot \cos \theta \\ Z_{01} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} \quad \text{avec } \theta = \omega \cdot t \\ \{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\} &= \begin{pmatrix} X_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) & L_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) - M_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ X_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) & L_{01} \cdot \sin(\omega \cdot t) + M_{01} \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ Z_{01} & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)_O} \end{aligned}$$

On constate donc que les efforts transmis au bâti par la liaison pivot ne sont pas constants et dépendent du temps. Pour rendre ces efforts indépendants du temps, il faut que :

$$\begin{cases} X_{01} = 0 \\ L_{01} = 0 \\ M_{01} = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 = 0 \\ D \cdot \dot{\theta}^2 - E \cdot \ddot{\theta} = 0 \\ -D \cdot \ddot{\theta} - E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g = 0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} x_g = 0 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Vous pourrez vérifier que ces conditions sont aussi suffisantes si la vitesse n'est pas constante.

3.5.2 Équilibrage

a) Équilibrage statique

On dit qu'un solide en rotation est équilibré statiquement lorsque le centre d'inertie est sur l'axe de rotation (dans l'exemple précédent $x_g = 0$).

b) Équilibrage dynamique

On dit qu'un solide est équilibré dynamiquement, s'il est équilibré statiquement et que les produits d'inertie comportant l'axe de rotation sont nuls (dans l'exemple précédent $D = 0$ et $E = 0$).

c) Principe de l'équilibrage

Équilibrer un solide en rotation revient donc à annuler les différents termes ci-dessus. Deux stratégies sont envisageables :

- ajouter des masses au solide afin de modifier ces caractéristiques cinétiques ;
- usiner le solide (perçage, meulage) afin de modifier la répartition des masses.

La première solution est utilisée pour réaliser l'équilibrage des roues de véhicules. On retrouve plutôt la seconde lors d'équilibrage réalisé sur des pièces massives (volant d'inertie), ces usinages sont alors effectués en usine, lors de la fabrication.

Du point de vue des calculs à réaliser, les deux méthodes sont analogues, la seconde revient à ajouter des masses négatives.

3.5.3 Équilibrage à 2 masses

Soit un solide S_1 , en rotation par rapport au repère galiléen R_0 . On souhaite équilibrer ce solide. Pour cela on rajoute au solide à équilibrer en rotation deux masses ponctuelles M_1 et M_2 (figure et données 3.4). Le nouvel ensemble est donc : $\Sigma = \{S_1, M_1, M_2\}$.

Nous allons rechercher la masse et la position dans le repère lié au solide S_1 de chacune des masses ponctuelles pour que l'ensemble Σ soit équilibré.

a) Détermination des caractéristiques cinétiques de l'ensemble

La masse totale de Σ est $m_\Sigma = m + m_1 + m_2$. La matrice d'inertie de l'ensemble est :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\Sigma)}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_O(M_1)}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_O(M_2)}}$$

Remarque : La matrice d'inertie d'une masse ponctuelle en son centre d'inertie est nulle (le volume

est nul!) : $\overline{\overline{\mathcal{I}_{M_1}(M_1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\substack{M_1 \\ \text{vB}}}$

S_1 , le solide à équilibrer de masse M
de matrice d'inertie :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S_1)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_O^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

de centre d'inertie :

$$\overrightarrow{OG} = x_g \cdot \vec{x}_1 + z_g \cdot \vec{z}_0;$$

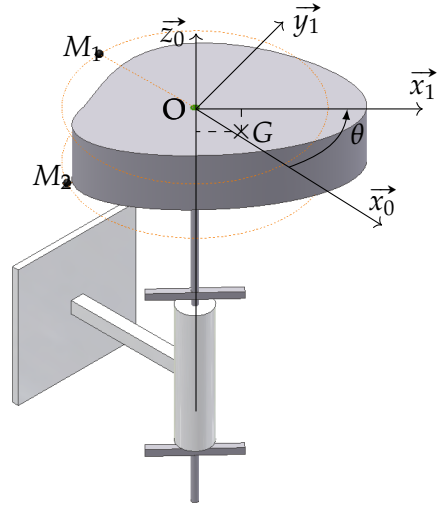
M_1 la masse ponctuelle de masse m_1 , avec

$$\overrightarrow{OM_1} = x_1 \cdot \vec{x}_1 + y_1 \cdot \vec{y}_1 + z_1 \cdot \vec{z}_0;$$

M_2 la masse ponctuelle de masse m_2 , avec

$$\overrightarrow{OM_2} = x_2 \cdot \vec{x}_1 + y_2 \cdot \vec{y}_1 + z_2 \cdot \vec{z}_0.$$

(a) Données



(b) Schéma

FIGURE 3.4 – Équilibrage à deux masses

En appliquant le théorème de Huygens, on obtient la matrice en O de la masse m_1 :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(M_1)}} = m_1 \cdot \begin{pmatrix} y_1^2 + z_1^2 & -x_1 \cdot y_1 & -x_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot y_1 & z_1^2 + x_1^2 & -y_1 \cdot z_1 \\ -x_1 \cdot z_1 & -y_1 \cdot z_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{pmatrix}_O^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

La matrice d'inertie de l'ensemble matériel Σ s'écrit finalement :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\Sigma)}} = \begin{pmatrix} A_\Sigma & -F_\Sigma & -E_\Sigma \\ -F_\Sigma & B_\Sigma & -D_\Sigma \\ -E_\Sigma & -D_\Sigma & C_\Sigma \end{pmatrix}_O^{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$$

avec

$$\begin{aligned} A_\Sigma &= A + m_1 \cdot (y_1^2 + z_1^2) + m_2 \cdot (y_2^2 + z_2^2) & -D_\Sigma &= -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 \\ B_\Sigma &= B + m_1 \cdot (z_1^2 + x_1^2) + m_2 \cdot (z_2^2 + x_2^2) & -E_\Sigma &= -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 \\ C_\Sigma &= C + m_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2) + m_2 \cdot (x_2^2 + y_2^2) & -F_\Sigma &= -F - m_1 \cdot x_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot y_2 \end{aligned}$$

b) Équilibrage statique

L'ensemble est équilibré statiquement si le centre d'inertie de l'ensemble est sur l'axe de rotation.

$$\overrightarrow{OG_\Sigma} = \frac{1}{M_\Sigma} \left(M \cdot \overrightarrow{OG} + m_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + m_2 \cdot \overrightarrow{OM_2} \right)$$

L'équilibre statique est donc réalisé si $\overrightarrow{OG_\Sigma} \cdot \vec{x}_1 = 0$ et $\overrightarrow{OG_\Sigma} \cdot \vec{y}_1 = 0$.

D'où les deux premières équations à respecter :

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 &= 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 &= 0 \end{aligned}$$

c) Équilibrage dynamique

Les produits d'inertie comportant l'axe de rotation (O, \vec{z}_0) doivent être nuls (ici D_Σ et E_Σ), d'où les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} -D_{\Sigma} &= -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0 \\ -E_{\Sigma} &= -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 \end{aligned}$$

Le système à résoudre est un système de 4 équations et 8 inconnues ($m_1, m_2, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$). Il existe donc a priori une infinité de solutions.

$$\begin{cases} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 = 0 \\ -D_{\Sigma} = -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0 \\ -E_{\Sigma} = -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 = 0 \end{cases}$$

d) Application : roue

Dans la réalité, des contraintes pratiques de réalisation limitent le nombre de solutions ; ainsi pour une roue (figure 3.5), les masses d'équilibrage ne peuvent être fixées que sur le pourtour de la jante (de rayon R , de largeur L) de chaque côté du pneu.

On a donc :

- $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = R$ et $z_1 = 0$ (ou $z_1 = L$) pour la première masse ;
- $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = R$ et $z_2 = L$ (ou $z_2 = 0$) pour la seconde.



FIGURE 3.5 – Roue jante

Reprenons les quatre équations de l'équilibrage.

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 &= 0 \\ m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 &= 0 \\ -D - m_1 \cdot y_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot y_2 \cdot z_2 &= 0 \\ -E - m_1 \cdot x_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot x_2 \cdot z_2 &= 0 \end{aligned}$$

On choisit, un plan pour la première masse ($z_1 = 0$) et le second pour l'autre $z_2 = L$. Il est préférable pour résoudre, d'écrire en polaire les quatre équations, en posant :

$$\begin{cases} x_1 = R \cdot \cos \theta_1 \\ y_1 = R \cdot \sin \theta_1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_2 = R \cdot \cos \theta_2 \\ y_2 = R \cdot \sin \theta_2 \end{cases}$$

Le système devient :

$$\begin{aligned} M \cdot x_g + m_1 \cdot R \cdot \cos \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \cos \theta_2 &= 0 \\ m_1 \cdot R \cdot \sin \theta_1 + m_2 \cdot R \cdot \sin \theta_2 &= 0 \\ -D - m_2 \cdot R \cdot \sin \theta_2 \cdot L &= 0 \\ -E - m_2 \cdot R \cdot \cos \theta_2 \cdot L &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de déduire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \theta_2 = \frac{D}{E} \\ m_2 = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{L \cdot R} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \tan \theta_1 = \frac{D}{E - M \cdot x_g \cdot L} \\ m_1 = \frac{D}{R \cdot L} \cdot \frac{1}{\sin \theta_1} \end{array} \right.$$

On détermine ainsi la position et la valeur des masses en fonctions des caractéristiques cinétiques de la roue à équilibrer.

Les machines à équilibrer intègrent des capteurs d'efforts qui permettent de mesurer les efforts dans les liaisons. La mesure de ces efforts permet de déduire les caractéristiques cinétiques de la roue par résolution du PFD. Nous avons montré plus haut, à partir de la détermination des actions dans la liaison, que ceux-ci dépendent des caractéristiques de la matrice d'inertie et de l'excentration du centre d'inertie du solide.

$$\{\mathcal{L}_{S_0 \rightarrow S_1}\} = \left\{ \begin{array}{ll} X_{01} = -M \cdot x_g \cdot \dot{\theta}^2 & L_{01} = D \cdot \dot{\theta}^2 \\ Y_{01} = 0 & M_{01} = -E \cdot \dot{\theta}^2 - M \cdot g \cdot x_g \\ Z_{01} = M \cdot g & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)_O}$$

On peut donc, à partir de la mesure des efforts de liaison, déterminer les composantes de la matrice d'inertie du solide à équilibrer puis résoudre complètement le système.