Cinétique

Torseur cinétique- Torseur dynamique - Énergie cinétique

Papanicola

Lycée Jacques Amyot

7 octobre 2012

Sommaire

Torseur cinétique

Définition

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{1}$$

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

Torseur cinétique

Définition

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A$$

- $\overrightarrow{V_{P/R}}$: Vitesse du point P du système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$;
- $\overrightarrow{p_{E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m$: Résultante cinétique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$;
- $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \displaystyle\int_{p\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m$: Moment cinétique au point A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.

Torseur cinétique
Résultante cinétique

Soit O un point lié au référentiel $\mathcal{R}$ et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel E , par définition du centre d'inertie :
$m_E \overrightarrow{OG} = \int_{P\in E} \overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m$.
En dérivant par rapport au temps dans $\mathcal{R}$:

$$m_E \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OG}\right]_R = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{P\in E}\overrightarrow{OP}\,\mathrm{d}m\right]_R .$$

Compte tenu du principe de conservation de la masse, on peut inverser la dérivation par rapport au temps et l'intégration sur la masse :

$$m_E \cdot \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OG}\right]_R = \int_{P\in E}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OP}\right]_R \mathrm{d}m.$$

On reconnaît la vitesse du point G et celle du point P par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \int_{p\in E}\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot\,\mathrm{d}m = m_E\cdot\overrightarrow{V_{G/R}} \tag{2}$$

Torseur cinétique
Changement de point

Le champ des moments cinétiques $\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}$ est équiprojectif, on peut donc écrire :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{p_{E/R}} \tag{3}$$

soit

$$\overrightarrow{\sigma_{B,E/R}} = \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA}\wedge m_E\cdot\overrightarrow{V_{G/R}}. \tag{4}$$

Torseur cinétique
Cas du solide indéformable

L'hypothèse de solide indéformable, permet d'associer les propriétés du champ des vecteurs vitesses d'un solide aux propriétés du torseur cinétique. Ainsi, pour P et A deux points liés au solide :

$$\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\wedge\overrightarrow{AP} \tag{5}$$

avec $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$: le vecteur rotation du solide S par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ d'où le torseur.

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{p_{S/R}} = \displaystyle\int_{p\in S}\overrightarrow{V_{P\in S/R}}\cdot\,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \displaystyle\int_{p\in S}\overrightarrow{AP}\wedge\overrightarrow{V_{P\in S/R}}\cdot\,\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{6}$$

Torseur cinétique
Cas du solide indéformable - résultante cinétique

La résultante cinétique devient :

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{p\in S}\overrightarrow{V_{P/R}}\cdot\,\mathrm{d}m = m_s\cdot\overrightarrow{V_{G\in S/R}}. \tag{7}$$

Torseur cinétique
Cas du solide indéformable - moment cinétique

Déterminons le moment cinétique :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} &= \int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \cdot \,\mathrm{d}m = \int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,\mathrm{d}m \\ &= \left(\int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \,\mathrm{d}m\right) \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,\mathrm{d}m\end{aligned}$$

avec :

$\int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \cdot \,\mathrm{d}m = m_s\overrightarrow{AG}$ et

$\int_{p\in S} \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \,\mathrm{d}m = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$

$$\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = m_s\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}. \tag{8}$$

Torseur cinétique
Cas du solide indéformable

Résultante cinétique

$$\overrightarrow{p_{S/R}} = \int_{p\in S} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m = m_s \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}. \tag{9}$$

Moment cinétique

$$\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = m_s\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}. \tag{10}$$

Torseur cinétique
Cas du solide indéformable - Cas particulier

A $\equiv$ G

$$\overrightarrow{\sigma_{G,E/R}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

A fixe

$$\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Mvt de translation

$$\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = m_s\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}$$

Torseur dynamique
Définition

Le torseur dynamique est le torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$:

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{A_{E/R}} = \int_{p\in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \\ \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \int_{p\in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \,\mathrm{d}m \end{array}\right\}_A \tag{11}$$

Torseur dynamique
Définition

- $\overrightarrow{\Gamma_{P/R}}$: accélération du point P de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$;
- $\overrightarrow{A_{E/R}} = \int_{p \in E} \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m$: résultante dynamique de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$, on montre aussi que
$$\overrightarrow{A_{E/R}} = m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}; \tag{12}$$
- $\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m$: moment dynamique en A de l'ensemble matériel E dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.

Torseur dynamique
Changement de point de réduction

Le champ des moments dynamiques est un champ de torseur. Pour changer de point de réduction on utilise donc la relation générale des torseurs :
$$\overrightarrow{\delta_{B,E/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m_E \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/S}}. \tag{13}$$

Torseur dynamique
Relation entre σ et δ

$\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m$, on peut écrire en dérivant

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \,\mathrm{d}m\right]_R = \int_{p \in E} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R \cdot \, \mathrm{d}m \\
&= \int_{p \in E} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{AP}\right]_R \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m + \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_{P/R}}\right]_R \cdot \, \mathrm{d}m \\
&= \int_{p \in E} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}\right]_R \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m + \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m \\
&= \int_{p \in E} \left(\overrightarrow{V_{P/R}} - \overrightarrow{V_{A/R}}\right) \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m + \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m \\
\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R &= \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m - \int_{p \in E} \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Torseur dynamique
Relation entre σ et δ

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R = \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m - \int_{p \in E} \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m$$

- $\int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m = \overrightarrow{\delta_{A,E/R}}$;
- $\int_{p \in E} \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m = \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \int_{p \in E} \overrightarrow{V_{P/R}} \cdot \, \mathrm{d}m = m_E \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R}}$.

D'où la relation cherchée entre le moment dynamique et le moment cinétique :
$$\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R + m_E \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R}} \tag{14}$$
A un point géométrique quelconque et G le centre d'inertie de cet ensemble matériel.

Torseur dynamique
Relation entre σ et δ

Finalement

$$\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R + m_E \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G/R}}$$

Cas particuliers

- $A \equiv G$: $\overrightarrow{\delta_{G,E/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{G,E/R}}\right]_R$;
- A fixe de R : $\overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,E/R}}\right]_R$.

Détermination du moment dynamique
Il est en général plus facile de déterminer le moment cinétique que le moment dynamique (le champ des vitesses est en général connu) puis de dériver. On choisira de le calculer en un point caractéristique. Pour obtenir le moment dynamique en un autre point on utilise la relation liant les moments d'un torseur.

Torseur dynamique
Cas du solide indéformable

Pour un solide, à partir de la relation de composition des vitesses des points du solide : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{V_{Q\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{QP}$.
Résultante dynamique :

$$\overrightarrow{A_{S/R}} = m_S \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} \tag{15}$$

Moment dynamique en A point géométrique :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\right]_R + m_S \cdot \overrightarrow{V_{A/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \tag{16}$$

Attention
Cette dernière relation est à manipuler avec précaution, en effet $\overrightarrow{V_{A/R}}$ n'est pas toujours facile à évaluer pour un point quelconque, on se limitera donc à calculer le moment dynamique uniquement en des points avec des propriétés particulières.

Torseur dynamique
Cas du solide indéformable

Cas particuliers

- A est confondu avec G, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\right]_R ; \tag{17}$$

- A est un point fixe de R, alors :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\right]_R . \tag{18}$$

Puis on utilisera la relation de changement de point des torseurs.

$$\overrightarrow{\delta_{B,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m_S \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/S}}. \tag{19}$$

Énergie cinétique
Définitions

Masse ponctuelle L'énergie cinétique élémentaire d'un point P affecté de la masse $\mathrm{d}m$ dans son mouvement par rapport à un repère R est donnée par :

$$dT_{P/R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{V_{P/R}}^2 \,\mathrm{d}m \tag{20}$$

Ensemble matériel L'énergie cinétique d'un ensemble matériel E en mouvement par rapport à un repère R est alors :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P/R}}^2 \,\mathrm{d}m \tag{21}$$

L'unité de l'énergie cinétique est le Joule.

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

Soit un solide S de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}$, A un point lié au solide.
On peut alors écrire l'énergie cinétique du solide dans son mouvement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$:

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2 \,\mathrm{d}m. \tag{22}$$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

Déterminons l'énergie cinétique d'un solide :

$$\begin{aligned}
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2 \,\mathrm{d}m \text{avec } VVPS/R = \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\\
&= \frac{1}{2}\int_{P\in E} \left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \,\mathrm{d}m\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 \,\mathrm{d}m + \int_{P\in E}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \,\mathrm{d}m\right)\\
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 \,\mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \,\mathrm{d}m\\
&+ \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

$$\begin{aligned}
T_{S/R} = \frac{1}{2}\int_{P\in E} \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 \,\mathrm{d}m + \int_{P\in E} \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \,\mathrm{d}m\\
+ \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)^2 \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ indépendant de $\mathrm{d}m$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_S\overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \int_{P\in E} \overrightarrow{AP} \,\mathrm{d}m\right)\\
&+ \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right) \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

On reconnaît le produit mixte $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ invariant par permutation circulaire avec $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AP}$ et $\vec{w} = \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

$$\begin{aligned}
T_{S/R} = \frac{1}{2}m_S\overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right)\\
+ \frac{1}{2}\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)\right) \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \,\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

avec $\int_{P\in E}\left(\overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right)\right) \,\mathrm{d}m = \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}$, l'opérateur d'inertie du solide S en A.
Finalement la relation permettant de déterminer l'énergie cinétique d'un solide :

$$\begin{aligned}
T_{S/R} = \frac{1}{2}m_S\overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right)\\
+ \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}
\end{aligned} \tag{23}$$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \tag{24}$$

Cette relation est assez difficile à utiliser, montrons que dans le cas d'un solide, l'énergie cinétique peut aussi se calculer en réalisant le comoment des torseurs cinématique et cinétique.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} \tag{25}$$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

- Torseur cinématique en A du solide S par rapport $\mathcal{R}$: $\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right\}_A$;
- Torseur cinétique du solide S par rapport $\mathcal{R}$:$\left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c}m_S \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\end{array}\right\}_A$.

$$\begin{aligned}
T_{S/R} &= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}_{S/R}\right\} \otimes \left\{\mathcal{C}_{S/R}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}m_S \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}\end{array}\right\}_A \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} + m_S \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(m_s \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right) + m_S \cdot \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \cdot \overrightarrow{V_{G\in S/R}}
\end{aligned}$$

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 + m_S \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

On retrouve bien le même résultat. Cette relation est souvent plus facile à mettre en œuvre que la relation générale.

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

L'énergie cinétique ne dépend pas du point de calcul, il est donc toujours intéressant de la calculer en un point avec des propriétés simplificatrices.

Pour un mouvement de translation ,

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{A\in S/R}}^2 = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 \tag{26}$$

En G, centre d'inertie du solide : $\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en G,

$$T_{S/R} = \frac{1}{2} m_S \overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \tag{27}$$

Énergie cinétique
Cas du solide indéformable

.

Pour un mouvement de rotation de centre C , point fixe dans le mouvement de rotation (rotule ou gyroscope) par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ avec $\overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}}$ la matrice d'inertie du solide S en C ;

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \tag{28}$$

Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe $(C, \vec{u})$, dans le référentiel, en C point fixe de l'axe de rotation du solide S par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

$$T_{S/R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_C(S)}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \frac{1}{2} I_u \cdot \omega_u^2 \tag{29}$$

avec I_u le moment d'inertie autour de l'axe $(C, \vec{u})$ et ω_u, la vitesse de rotation.

Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solide

Torseur cinétique d'un ensemble de solides

Soit E un ensemble de n solides S_i , en mouvement par rapport au repère R Le torseur cinétique d'un ensemble de solide, est la somme (en un même point) des torseurs cinétiques de chaque solide.

$$\{\mathcal{C}_{E/R}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{C}_{S_i/R}\} \tag{30}$$

La résultante cinétique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes cinétiques et le moment cinétique en un point A d'un ensemble de solides est la somme des moments cinétiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{p_{E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{p_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\sigma_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_{A,S_i/R}} \tag{31}$$

Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solide

Torseur dynamique d'un ensemble de solides

Le torseur dynamique d'un ensemble de solide, est la somme (en un même point) des torseurs dynamique de chaque solide.

$$\{\mathcal{D}_{E/R}\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{D}_{S_i/R}\} \tag{32}$$

La résultante dynamique d'un ensemble de solides est la somme des résultantes dynamiques et le moment dynamique en un point A d'un ensemble de solide est la somme des moments dynamiques de chaque solide en ce même point.

$$\overrightarrow{A_{E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_{S_i/R}} \qquad \overrightarrow{\delta_{A,E/R}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\delta_{A,S_i/R}} \tag{33}$$

Caractéristiques cinétiques d'un ensemble de solide

Énergie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solide est la somme des énergies cinétiques.

$$T_{E/R} = \sum_{i=1}^{n} T_{S_i/R} \tag{34}$$

En décomposant sur chaque solide :

$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}_{S_i/R}\} \otimes \{\mathcal{C}_{S_i/R}\}$$

$$T_{E/R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S_i/R}} \\ \overrightarrow{V_{A_i \in S/R}} \end{array} \right\}_{A_i} \otimes \left\{ \begin{array}{c} m_i \overrightarrow{V_{G_i \in S_i/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A_i,S_i/R}} \end{array} \right\}_{A_i} \tag{35}$$

Remarque : l'énergie cinétique ne dépendant pas du point de calcul du comoment, chaque comoment peut-être calculé en un point particulier caractéristique du mouvement considéré.