Cinétique
Opérateur d'inertie

Papanicola

Lycée Jacques Amyot

23 septembre 2012

Sommaire

Opérateur d'inertie
Opérateur d'inertie en 1 point - Définition

Définition
On appelle opérateur d'inertie $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}}$ au point O d'un solide S l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace associe le vecteur

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} \cdot \vec{u} = \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) \mathrm{d}m. \qquad (1)$$

L'opérateur d'inertie permet de synthétiser l'ensemble des caractéristiques d'inertie d'un solide. Cet opérateur est une fonction linéaire et peut être représenté par une matrice.

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie - Matrice d'inertie

Soit $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère, et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ une base,
P, un point du solide S, avec $\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}$,
$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z}$, un vecteur.
Déterminons : $\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right)$:

$$\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}) \wedge (\vec{u} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = &\left(+\alpha \cdot (y^2+z^2) \quad -\beta \cdot x \cdot y \quad -\gamma \cdot x \cdot z\right)\vec{x} \\ &+\left(-\alpha \cdot x \cdot y \quad +\beta \cdot (z^2+x^2) \quad -\gamma \cdot y \cdot z\right)\vec{y} \\ &+\left(-\alpha \cdot x \cdot z \quad -\beta \cdot y \cdot z \quad +\gamma \cdot (x^2+y^2)\right)\vec{z} \end{aligned}$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie

En intégrant

$$\int_{p\in S} \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \mathrm{d}m =$$

$$\left(\alpha \cdot \int_{p\in S} (y^2+z^2) \cdot \mathrm{d}m - \beta \cdot \int_{p\in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m - \gamma \cdot \int_{p\in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m\right)\vec{x}$$
$$+\left(-\alpha \cdot \int_{p\in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m + \beta \cdot \int_{p\in S} (z^2+x^2) \cdot \mathrm{d}m - \gamma \cdot \int_{p\in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m\right)\vec{y}$$
$$+\left(-\alpha \cdot \int_{p\in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m - \beta \cdot \int_{p\in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m + \gamma \cdot \int_{p\in S} (x^2+y^2) \cdot \mathrm{d}m\right)\vec{z}$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie

On peut mettre ce résultat sous la forme du produit d'une matrice nommée $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}}$ et du vecteur $\vec{u}$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} +\int_{p\in S} (y^2+z^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} x\cdot y\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} x\cdot z\cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{p\in S} x\cdot y\cdot \mathrm{d}m & +\int_{p\in S} (z^2+x^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} y\cdot z\cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{p\in S} x\cdot z\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} y\cdot z\cdot \mathrm{d}m & +\int_{p\in S} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Cette matrice est caractéristique de la répartition de la matière d'un solide autour d'un point (ici O) et dans une base donnée $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On peut pour chaque solide définir une matrice d'inertie.

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} +\int_{p\in S} (y^2+z^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} x\cdot y\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} x\cdot z\cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{p\in S} x\cdot y\cdot \mathrm{d}m & +\int_{p\in S} (z^2+x^2)\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} y\cdot z\cdot \mathrm{d}m \\ -\int_{p\in S} x\cdot z\cdot \mathrm{d}m & -\int_{p\in S} y\cdot z\cdot \mathrm{d}m & +\int_{p\in S} (x^2+y^2)\ \mathrm{d}m \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie

Remarques :

- La matrice d'inertie dépend de la base et du point de calcul, il est donc important de les préciser ;
- La matrice d'inertie est une matrice symétrique ;
- On nomme aussi cette matrice tenseur d'inertie.

Par convention, on pose :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}} = \begin{pmatrix} I_{(O,\vec{x})} & -P_{xy} & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_{(O,\vec{y})} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & -P_{xz} & I_{(O,\vec{z})} \end{pmatrix}_{\substack{O \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie - moment d'inertie

On reconnaît sur la diagonale de la matrice

Le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{x})$:

$$A = I_{(O,\vec{x})} = \int\limits_{p\in S} \left(y^2 + z^2\right) \cdot \mathrm{d}m,$$

Le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{y})$:

$$B = I_{(O,\vec{y})} = \int\limits_{p\in S} \left(z^2 + x^2\right) \cdot \mathrm{d}m,$$

Le moment d'inertie du solide S autour de l'axe $(O, \vec{z})$:

$$C = I_{(O,\vec{z})} = \int\limits_{p\in S} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \mathrm{d}m$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie - produits d'inertie

À partir de cette définition de la matrice d'inertie on nomme les trois autres termes **produits d'inertie**, soit :

Le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$:

$$F = P_{xy} = \int\limits_{p\in S} x \cdot y \cdot \mathrm{d}m;$$

Le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$:

$$E = P_{xz} = \int\limits_{p\in S} x \cdot z \cdot \mathrm{d}m;$$

le produit d'inertie par rapport plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$:

$$E = P_{yz} = \int\limits_{p\in S} y \cdot z \cdot \mathrm{d}m.$$

Opérateur d'inertie
Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

Le moment d'inertie autour de l'axe $\Delta\left(O, \vec{\delta}\right)$ s'écrit :

$$I_\Delta(S) = \int_{P\in S} \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)^2 \mathrm{d}m = \int_{P\in S} \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \mathrm{d}m.$$

On sait que (produit mixte) : $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u})$

On pose : $\vec{u} = \vec{\delta}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{w} = \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)$

alors $\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP} \cdot \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right) \cdot \vec{\delta}$

Le moment d'inertie peut se mettre sous la forme :

$I_\Delta(S) = \vec{\delta} \cdot \int_{P\in S} \left(\overrightarrow{OP} \wedge \left(\vec{\delta} \wedge \overrightarrow{OP}\right)\right) \mathrm{d}m.$

Opérateur d'inertie
Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

On reconnaît, sous l'intégrale, l'opérateur d'inertie au point O du solide S. Donc

$$I_\Delta(S) = \vec{\delta} \cdot \left(\overline{\overline{\mathcal{I}_O(\delta)}} \cdot \vec{\delta}\right) \tag{2}$$

Si $\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O\\B}}$ et $\vec{\delta} = (\alpha, \beta, \gamma)$ alors

$$I_\Delta(S) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{\substack{O\\B}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \tag{3}$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

On recherche la relation entre la matrice d'inertie en A du solide S et la matrice d'inertie en G le centre d'inertie du solide.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

soit

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_S \left(\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right) \wedge \left(\vec{u} \wedge \left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GM}\right)\right)\right)\mathrm{d}m$$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

Les 2ème et 3ème termes sont nuls car $\int_S \overrightarrow{GM}\mathrm{d}m = \vec{0}$

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \int_S \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m + \int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m$$

il reste

- Second terme : $\int_S \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{GM}\right)\right)\mathrm{d}m = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{u}$ (opérateur d'inertie en G).
- Premier terme : $d\int_S \left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right)\mathrm{d}m = m\left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right)$

D'où le théorème de Huygens généralisé

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} \cdot \vec{u} = \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} \cdot \vec{u} + m\left(\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)\right) \tag{4}$$

Opérateur d'inertie
Théorème de Huygens généralisé

Déterminons $\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right)$ avec $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\overrightarrow{AG} = (a, b, c)$.

$$\overrightarrow{AG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}\right) = \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On pose pour les matrices d'inertie en G et A :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} = \begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_{\substack{A \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}} \quad \text{et } \overline{\overline{\mathcal{I}_G(S)}} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{\substack{G \\ (\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

On déduit, dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, la relation entre ces matrices :

$$\begin{pmatrix} A_A & -F_A & -E_A \\ -F_A & B_A & -D_A \\ -E_A & -D_A & C_A \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}_G + m \cdot \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a\cdot b & -a\cdot c \\ -a\cdot b & a^2+c^2 & -b\cdot c \\ -a\cdot c & -b\cdot c & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

Opérateur d'inertie
Changement de base

Connaissant la matrice d'inertie du solide S en un point A dans la base B_1, on se propose de déterminer cette matrice en ce même point dans la base B_2.

Matrice de Passage : On appelle P_{B_1,B_2}, la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 cette matrice est constituée en colonnes des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base B_2 écrits dans la base d'origine B_1. On l'appelle aussi matrice de changement de base, cette matrice est une matrice inversible.

Soit $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1}$ et $\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2}$ les matrices d'inertie d'un solide S respectivement dans la base B_1 et la base B_2, et P_{B_1,B_2} la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2, on a alors :

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_2} = P^{-1}_{B_1,B_2} \cdot \overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}}_{B_1} \cdot P_{B_1,B_2}$$

avec $P^{-1}_{B_1,B_2}$ la matrice inverse de P_{B_1,B_2}.

Opérateur d'inertie
Propriétés et directions principales

La matrice d'inertie est une matrice symétrique, une simple étude mathématique de la matrice d'inertie nous permet de dire que :

- Les valeurs propres de la matrice sont réelles ;
- Il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est diagonale.

Il existe ainsi pour tout point A une base orthogonale de vecteurs propres $\mathcal{B}' = \left(\vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'}\right)$.
Dans cette base la matrice d'inertie du solide S au point A est une matrice diagonale :

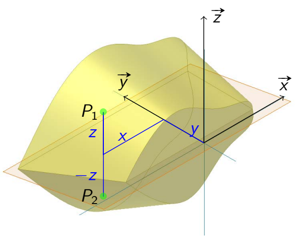
$$\overline{\overline{\mathcal{I}_A(S)}} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}_{A,\mathcal{B}'} .$$

Opérateur d'inertie
Propriétés et directions principales

La base $\mathcal{B}' = \left(\vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'}\right)$ est appelée base principale d'inertie au point A. Les axes $\left(A, \vec{x'}\right)$, $\left(A, \vec{y'}\right)$ et $\left(A, \vec{z'}\right)$ sont les axes principaux d'inertie et A', B' et C' les moments principaux d'inertie.

- Pour tous les solides présentant des symétries dans la répartition des masses, il est facile de déterminer les axes principaux en s'appuyant sur ces symétries.
- Si le point d'écriture est le centre d'inertie, on parle alors de **base centrale** et de **moments centraux d'inertie** ;
- Les moments centraux d'inertie sont minima.

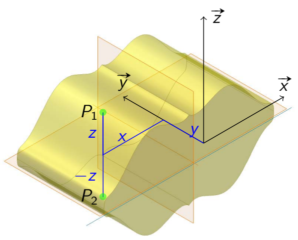
Opérateur d'inertie
Solide avec un plan de symétrie



Lorsque le solide possède un plan de symétrie, les produits d'inertie comportant la normale au plan de symétrie sont nuls.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & P_{xy} & 0 \\ P_{xy} & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

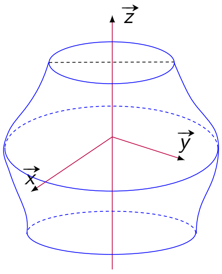
Opérateur d'inertie
Solide avec deux plans de symétrie



Si un solide possède deux plans de symétrie, en choisissant d'écrire la matrice d'inertie en un point O de la droite d'intersection des deux plans et dans une base $\mathcal{B}$ respectant cette symétrie, alors les trois produits d'inerties sont nuls.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} I_{Ox} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Oy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Oz} \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Opérateur d'inertie
Solide avec une symétrie de révolution

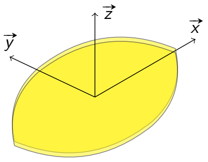


Si l'axe $(O, \vec{z})$ est un axe de révolution matérielle, le solide possède alors une infinité de plan de symétrie orthogonaux. Les produits d'inertie sont donc tous nuls et la matrice est diagonale dans toute base contenant l'axe de révolution et en tout point de cet axe.

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Compte tenu de la symétrie de révolution les moments d'inertie par rapport aux $(O, \vec{x})$ et $(O, \vec{y})$ sont égaux.

Opérateur d'inertie
Solide plan d'épaisseur négligeable



Pour un solide plan d'épaisseur négligeable, la matrice s'écrit en un point O du plan et dans une base $\mathcal{B}$ contenant la normale à celui-ci :

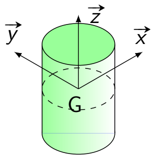
$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Si le solide est un disque plan, alors la matrice s'écrit en O centre du disque et dans une base $\mathcal{B}$ telle que $\vec{z}$ est la normale au plan

$$\overline{\overline{\mathcal{I}_O(S)}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot A \end{pmatrix}_{O,\mathcal{B}}$$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Cylindre

Cylindre d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H

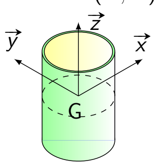


$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{4}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{G,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$

Opérateur d'inertie
Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Tube

Tube d'axe $(G, \vec{z})$ de rayon R et de hauteur H (épaisseur négligeable)



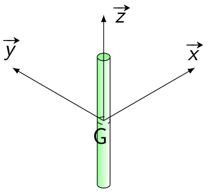
$$\begin{pmatrix} m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{H^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{G,(\vec{?},\vec{?},\vec{z})}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Tige

Tige cylindrique $(G, \vec{z})$ de rayon négligeable



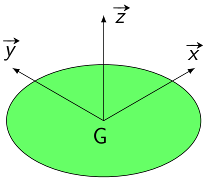
$$\begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{H^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{H^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Disque

Disque d'axe $(G, \vec{z})$ d'épaisseur négligeable



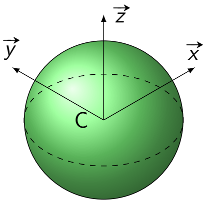
$$\begin{pmatrix} m\cdot\dfrac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & m\cdot\dfrac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m\cdot\dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}^{G}$$

en G dans toute base contenant $\vec{z}$.

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Sphère pleine

Sphère pleine de centre C



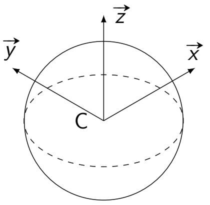
$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{5}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{\forall\mathcal{B}}^{C}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Sphère creuse

Sphère creuse de centre C



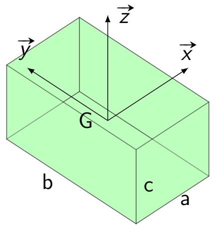
$$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{3}m\cdot R^2 \end{pmatrix}_{\forall\mathcal{B}}^{C}$$

En C centre de la sphère et dans toute base

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Parallélépipède

Parallélépipède de cotés a, b et c



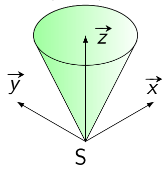
$$\begin{pmatrix} m \cdot \dfrac{b^2+c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & m \cdot \dfrac{a^2+c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \cdot \dfrac{a^2+b^2}{12} \end{pmatrix}_{\substack{C \\ \mathcal{B}}}$$

en G dans la base $\mathcal{B}$ parallèle aux arêtes du parallélépipède

Opérateur d'inertie

Matrice d'inertie de quelques solides élémentaire - Cône

Cône $(S, \overrightarrow{z})$ de rayon R et de hauteur H



$$\begin{pmatrix} \dfrac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3 \cdot m}{5} \cdot \left(\dfrac{R^2}{4} + H^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{3 \cdot m}{5} \dfrac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{\substack{S \\ (\overrightarrow{?}, \overrightarrow{?}, \overrightarrow{z})}}$$

au sommet S dans toute base contenant $\overrightarrow{z}$.